



# Signály a systavy

## Prednáška č. 2

- Aktualizácia
- Ortogonalita signálov
- Aproximácia signálu
- Systémy ortogonálnych funkcií

# *Ortogonalita signálov*

- Aký je rozdiel medzi informáciou a správou?

# *Ortogonalita signálov*

- Aký je rozdiel medzi spojitým a kvantovaným signálom?

# *Ortogonalita signálov*

- Aké harmonické funkcie poznáme?

# Ortogonalita signálov

- Aký je vzťah medzi periódou a frekvenciou a uhlovou frekvenciou?



# Signály a sústavy

## Prednáška č. 2

- Aktualizácia
- **Ortogonalita signálov**
- Aproximácia signálu
- Systémy ortogonálnych funkcií

# Ortogonalita signálov

- Už vieme, že deterministické signály vieme jednoznačne popísať pomocou matematického predpisu.
  - Problém: matematické vyjadrenie môže byť aj veľmi zložité a môže byť komplikované s takým signálom (matematicky) pracovať.
- Tiež vieme, že náhodné signály popisujeme štatisticky, ale jednoduchý matematický predpis nepoznáme.
  - Problém: je veľmi náročné (nemožné) matematicky tento signál analyzovať.

**Všetky signály však dokážeme matematicky aproximovať (popísať približne) pomocou vhodného setu ortogonálnych funkcií.**

# Ortogonalita signálov

- Už vieme, že deterministické signály vieme jednoznačne popísať pomocou matematického predpisu.
  - **Problém:** matematické vyjadrenie môže byť aj veľmi zložité a môže byť komplikované s takým signálom (matematicky) pracovať.
- Tiež vieme, že náhodné signály popisujeme štatisticky, ale jednoduchý matematický predpis nepoznáme.
  - **Problém:** je veľmi náročné (nemožné) matematicky tento signál analyzovať.

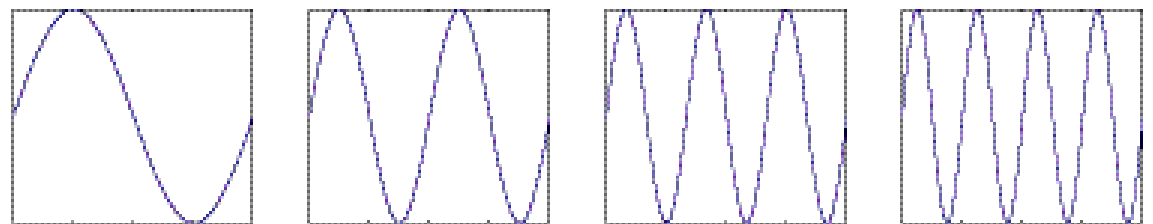
**Všetky signály však dokážeme matematicky aproximovať (popísať približne) pomocou vhodného setu ortogonálnych funkcií.**

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t) = a_0 \Psi_0(t) + a_1 \Psi_1(t) + a_2 \Psi_2(t) + \dots + a_N \Psi_N(t)$$

$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bázovej funkcie.

Čím je bázových funkcií viac, tým je aproximácia signálu lepšia.

**Set ortogonálnych funkcií  $\sin(nt)$  - Ortogonálna báza**





# Ortogonalita signálov

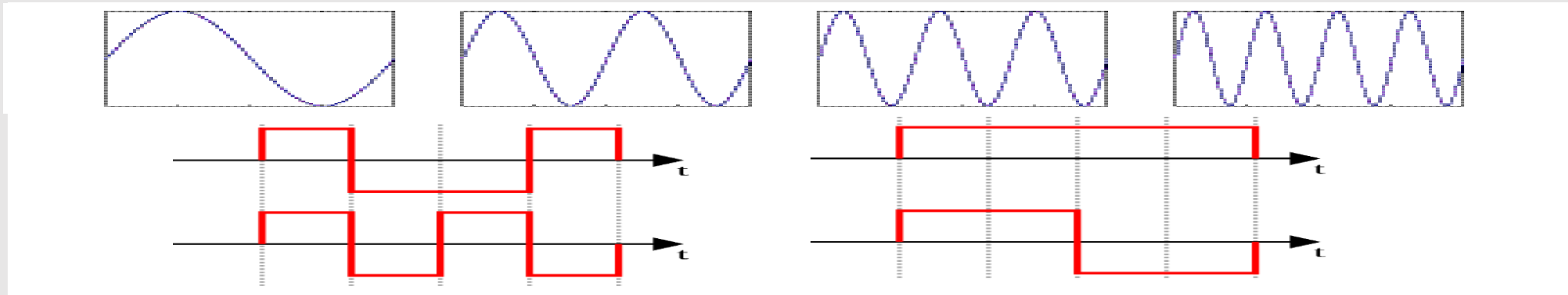
$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy

$a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bazovej funkcie.

Čím je **bázových funkcií viac**, tým je **aproximácia signálu lepšia**.

**Ortogonalné bázy** (Harmonické a Haarové funkcie)



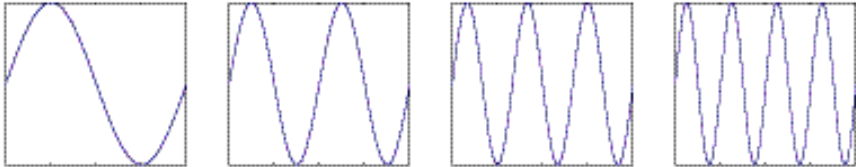
# Ortogonalita signálov

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

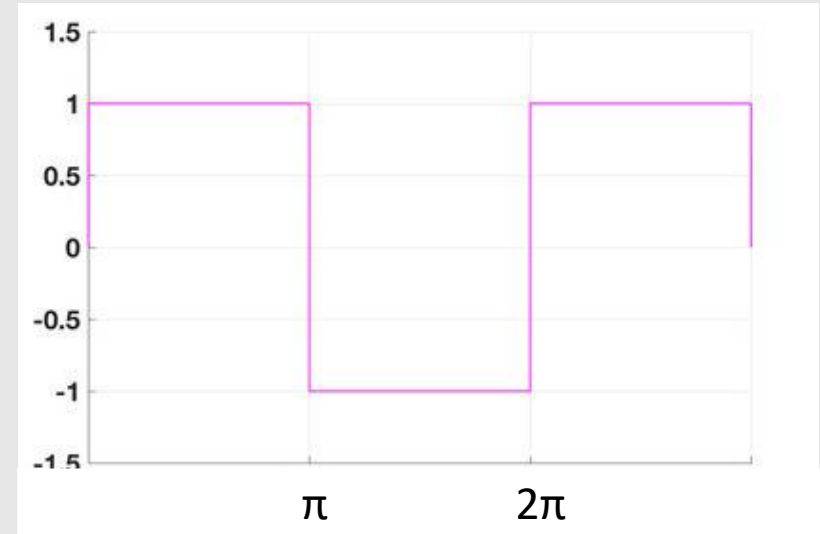
$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bázovej funkcie.

**Čím je báзовých funkcií viac, tým je aproximácia signálu lepšia.**

**Ortogonalná báza** (Harmonické funkcie  $\sin(t)$ )



- Majme pravouhlý periodický signál.



- Popíšte tento signál!

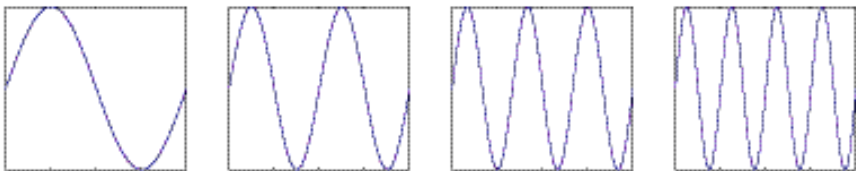
# Ortogonalita signálov

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

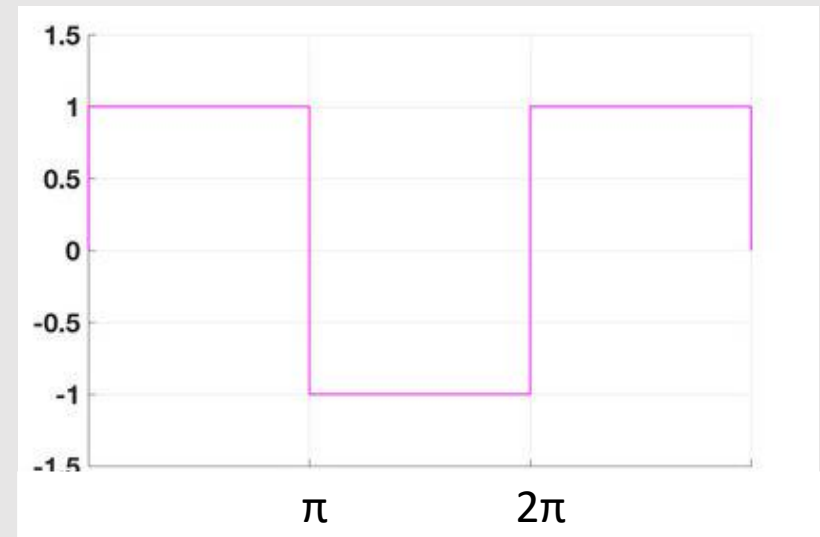
$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bázeovej funkcie.

**Čím je báзовých funkcií viac, tým je aproximácia signálu lepšia.**

**Ortogonalná báza** (Harmonické funkcie  $\sin(t)$ )



- Majme pravouhlý periodický signál.



- Popíšte tento signál!

$$f(t) = \begin{cases} 1; & t \in [0, \pi) \\ -1; & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

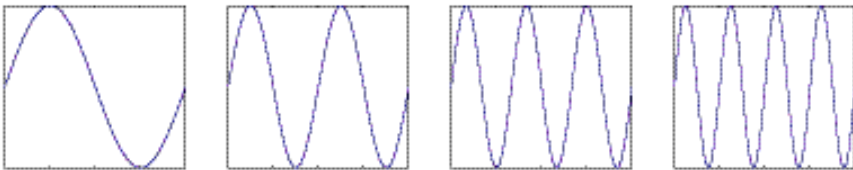
# Ortogonalita signálov

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

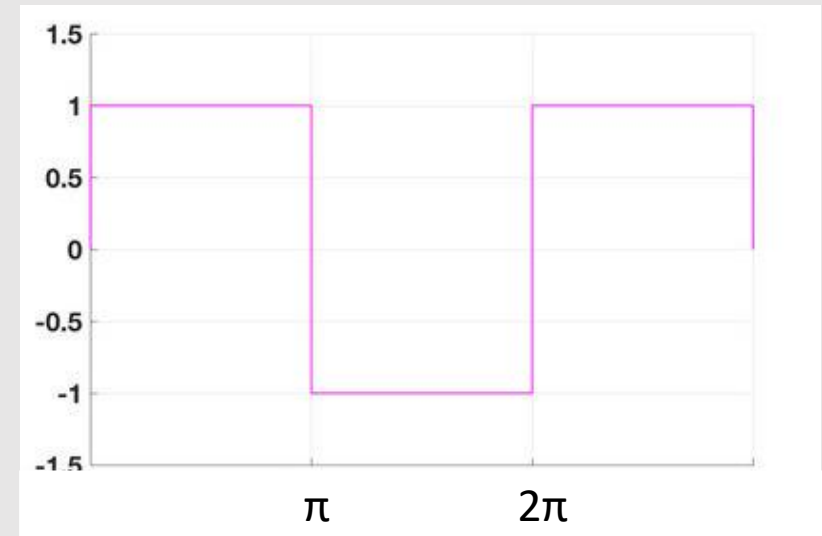
$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bázovej funkcie.

Čím je **bázových funkcií viac**, tým je **aproximácia signálu lepšia**.

**Ortogonalná báza** (Harmonické funkcie  $\sin(t)$ )



- Majme pravouhlý periodický signál.



$$f(t) = \begin{cases} 1; & t \in [0, \pi) \\ -1; & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

- Dá sa ukázať, že tento signál je možné rozložiť na sumu funkcií  $\sin(kt)$  s vhodnou frekvenciou a amplitúdou:

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t) = \sum_k \frac{4}{k\pi} \sin(kt) = \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) \dots$$

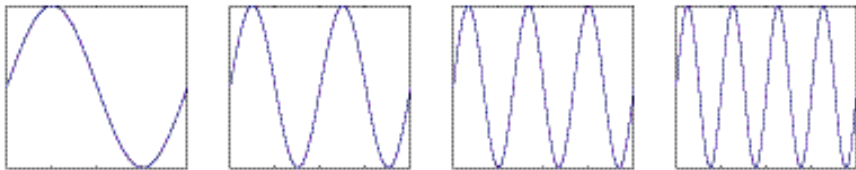
# Ortogonalita signálov

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

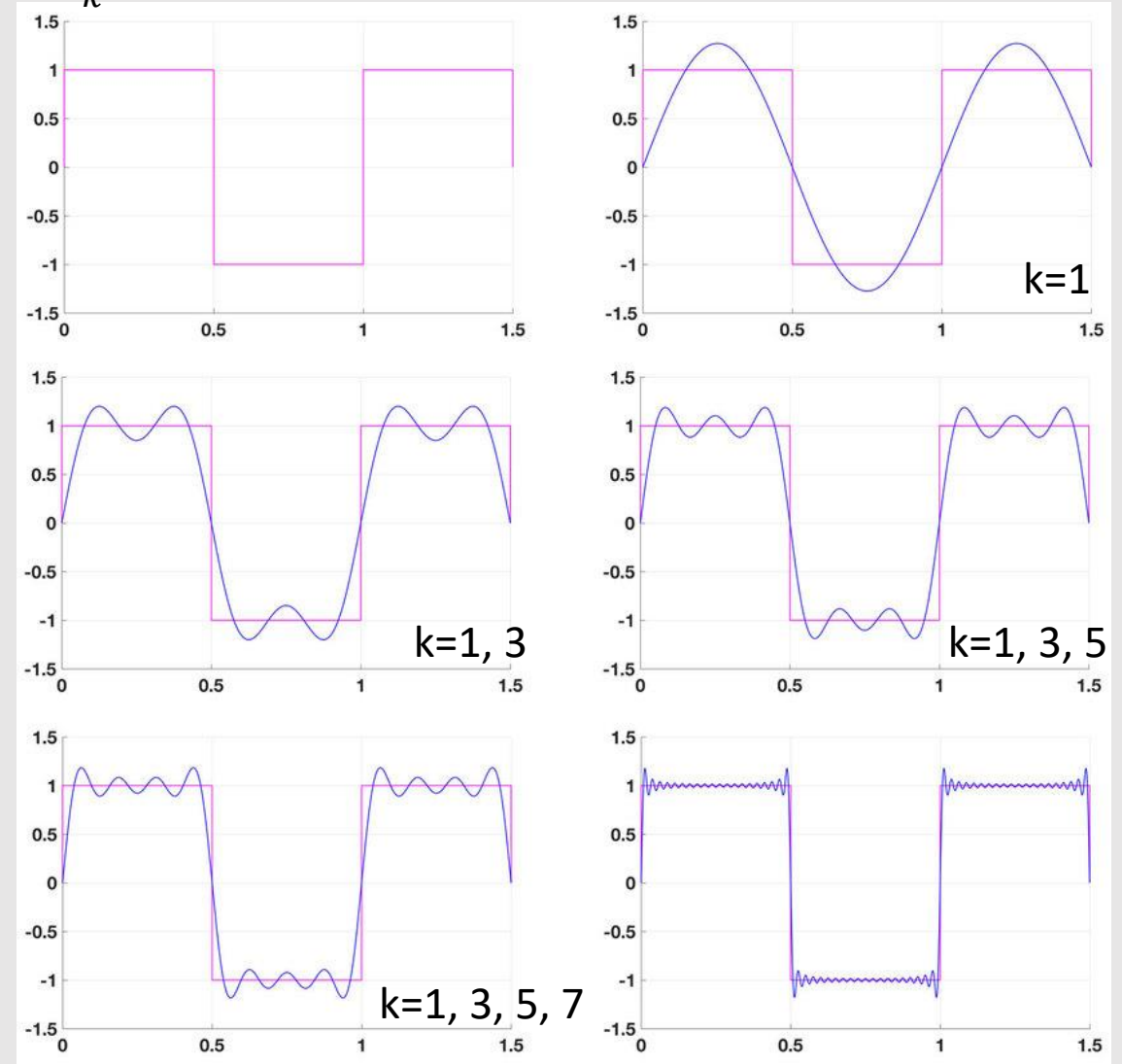
$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bázeovej funkcie.

**Čím je bázových funkcií viac, tým je aproximácia signálu lepšia.**

**Ortogonalná báza** (Harmonické funkcie  $\sin(t)$ )



$$f(t) \cong \sum_k \frac{4}{k\pi} \sin(kt) = \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) \dots$$



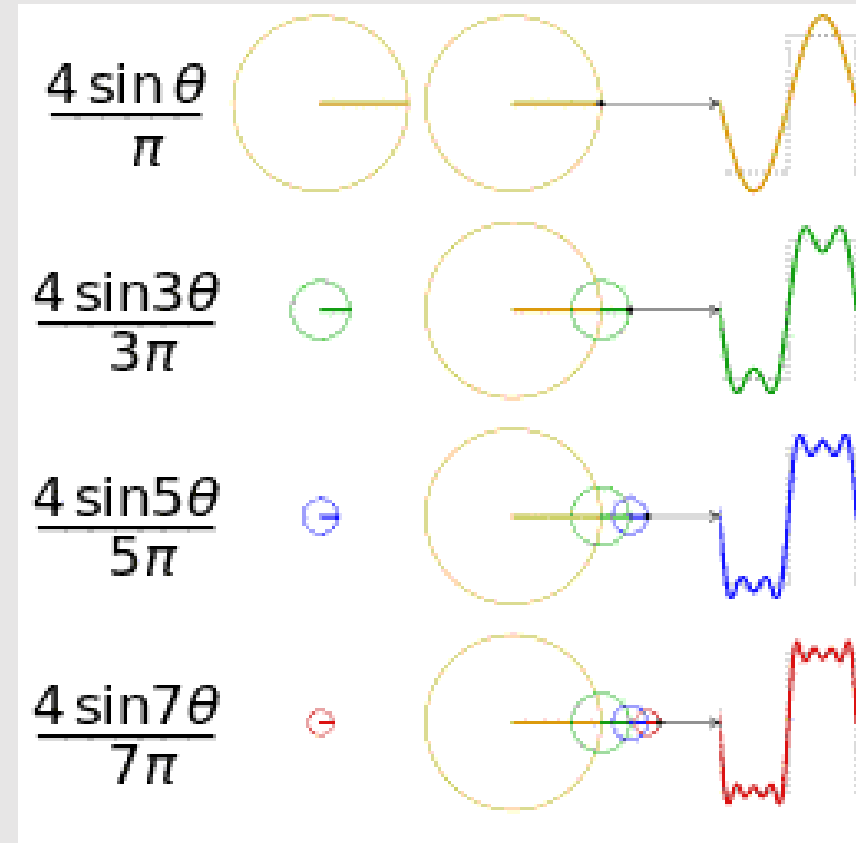
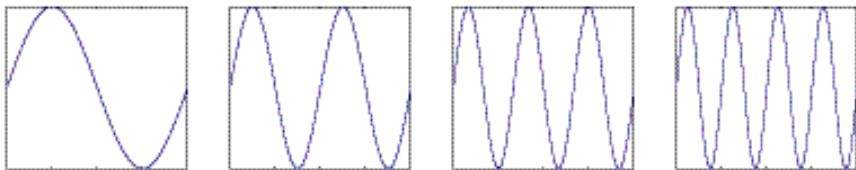
# Ortogonalita signálov

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

$\Psi_k$  je k-tá ortogonálna funkcia z danej bázy  
 $a_k$  je k-tý rozkladový koeficient, ktorý určuje veľkosť amplitúdy danej bazovej funkcie.

Čím je **bázových funkcií viac**, tým je **aproximácia signálu lepšia**.

**Ortogonalná báza** (Harmonické funkcie  $\sin(t)$ )



Ako sa k tejto aproximácii dopracovať a čo musí ortogonálna báza spĺňať?

# Ortogonalita signálov – podmienky ortogonality

- Signál je možné vyjadriť pomocou súboru funkcií vtedy, ak spĺňajú podmienku **ortogonality**:

Funkcie sú **ortogonálne** ak platí:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \neq k \\ K & \text{pre } j = k \end{cases}$$

**K** je konštanta, ak **K=1** hovoríme, že funkcie  $\Psi_j(t) \Psi_k(t)$  sú **ortonormálne**!



# Signály a sústavy

## Prednáška č. 2

- Aktualizácia
- Ortogonalita signálov
- **Aproximácia signálu**
- Systémy ortogonálnych funkcií



# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Predpokladáme, že máme set ortogonálnych funkcií  $\Psi_1(t), \Psi_2(t) \dots \Psi_N(t)$
- Signál bude aproximovaný podľa nasledovného vzťahu:

$$f(t) \cong \sum_k a_k \Psi_k(t)$$

- Keďže funkcie  $\Psi_k$  poznáme, je potrebné určiť koeficienty  $a_k$ .
- Tieto koeficienty sa **musia určiť tak, aby stredná kvadratická chyba bola minimálna** (priemerná hodnota kvadratického rozdielu medzi skutočným signálom a jeho aproximáciou)

The diagram shows the formula for the mean square error (MSE) within a blue border. The formula is  $\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_k a_k \Psi_k(t)]^2 dt$ . A purple arrow points from the label 'stredná kvadratická chyba' to the symbol  $\varepsilon$ . A blue arrow points from the label 'Pôvodný – aproximovaný signál' to the term  $f(t)$ . A red arrow points from the label 'Aproximačný signál' to the term  $\sum_k a_k \Psi_k(t)$ , which is enclosed in a red box.

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_k a_k \Psi_k(t)]^2 dt$$

stredná kvadratická chyba

Pôvodný – aproximovaný signál

Aproximačný signál

# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_k a_k \Psi_k(t)]^2 dt$$

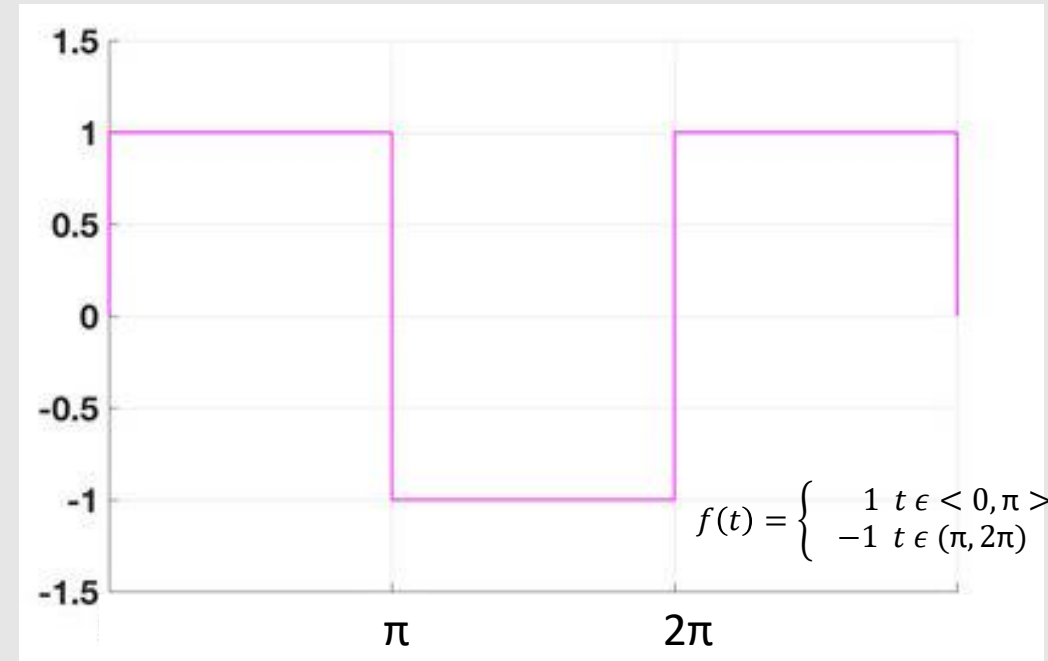
- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázeovej funkcie.
- Potom vzťah prepíšeme nasledovne:

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - a \Psi_k(t)]^2 dt$$

Diagrammatic annotations:

- A green box labeled "Známe" (Known) points to  $f(t)$  and  $\Psi_k(t)$ .
- A blue box labeled "Konštanta" (Constant) points to  $a$ .
- A purple arrow points from the symbol  $\varepsilon$  to a box stating "Má byť minimálna" (Should be minimal).

**Stredná kvadratická chyba je závislá iba od tohto koeficientu.** Teda  $\varepsilon$  je funkciou  $a \rightarrow \varepsilon = f(a)$



# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

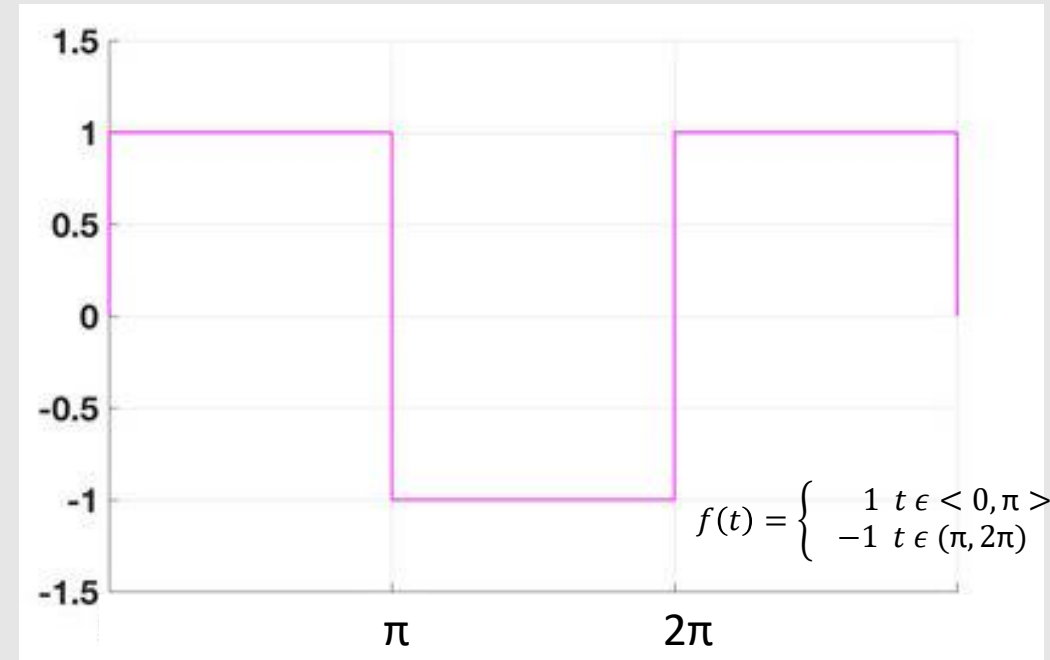
$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_k a_k \Psi_k(t)]^2 dt$$

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázeovej funkcie.
- Potom vzťah prepíšeme nasledovne

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - a \Psi_1(t)]^2 dt$$

Diagrammatic annotations:

- A green box labeled "Známe" (Known) points to  $f(t)$  and  $\Psi_1(t)$ .
- A blue box labeled "Konštanta" (Constant) points to the coefficient  $a$ .



**Stredná kvadratická chyba je závislá iba od tohto koeficientu.** Teda  $\varepsilon$  je funkciou  $a \rightarrow \varepsilon = f(a)$

Dá sa ukázať, že minimálne bude pre také  $a_{opt}$  kde derivácia  $\varepsilon$  bude nulová!  $\rightarrow \frac{d\varepsilon}{da} = 0$  (Pozrieť matematiku – praktický význam derivácie!!)

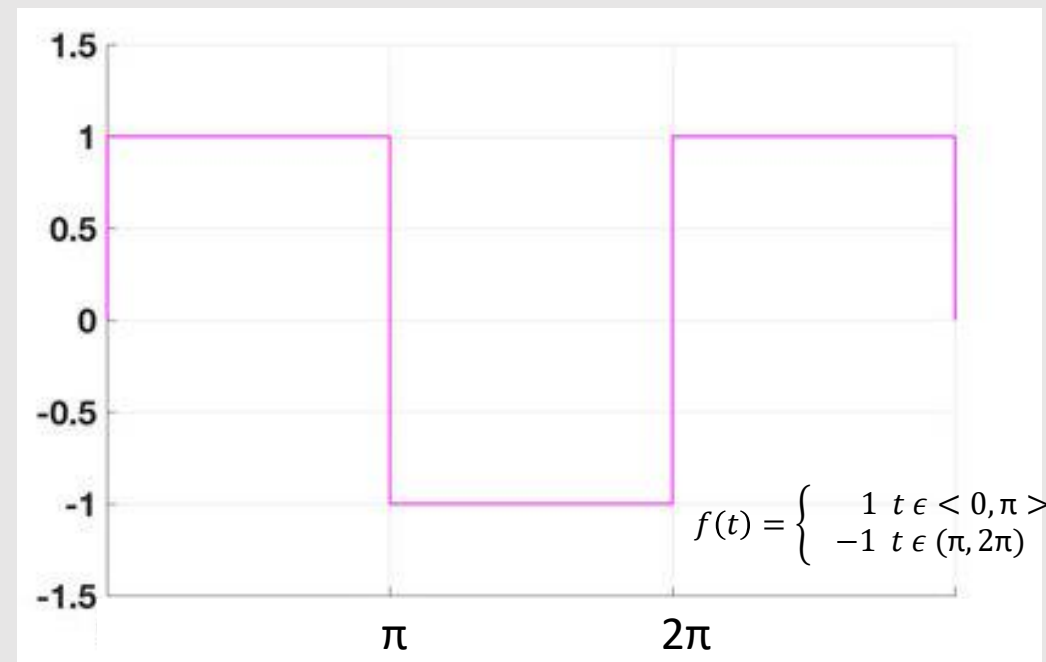
# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_k a_k \Psi_k(t)]^2 dt$$

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázeovej funkcie.
- Potom vzťah prepíšeme nasledovne

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - a \Psi_1(t)]^2 dt$$

Diagrammatic annotations: A green box labeled "Známe" points to  $f(t)$ . A red box labeled "Konštanta" points to  $a$ .



**Stredná kvadratická chyba je závislá iba od tohto koeficientu.** Teda  $\varepsilon$  je funkciou  $a \rightarrow \varepsilon = f(a)$

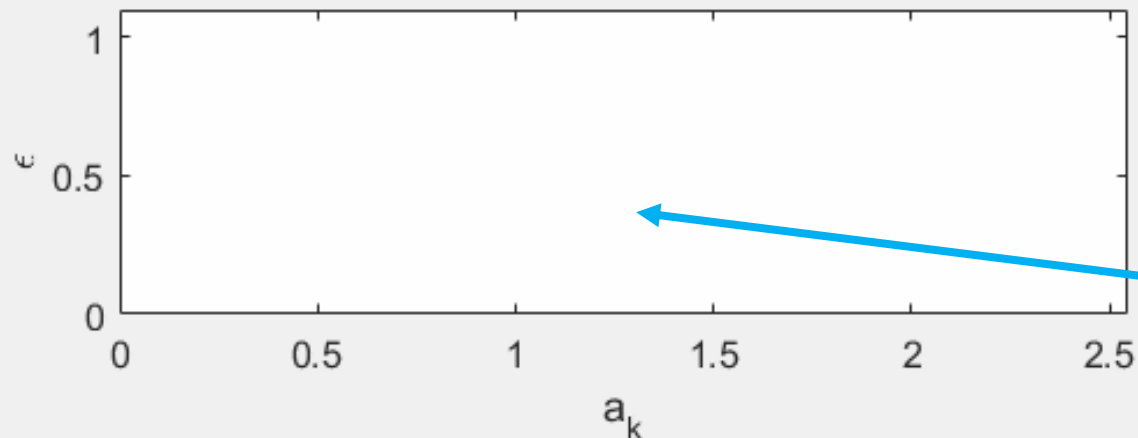
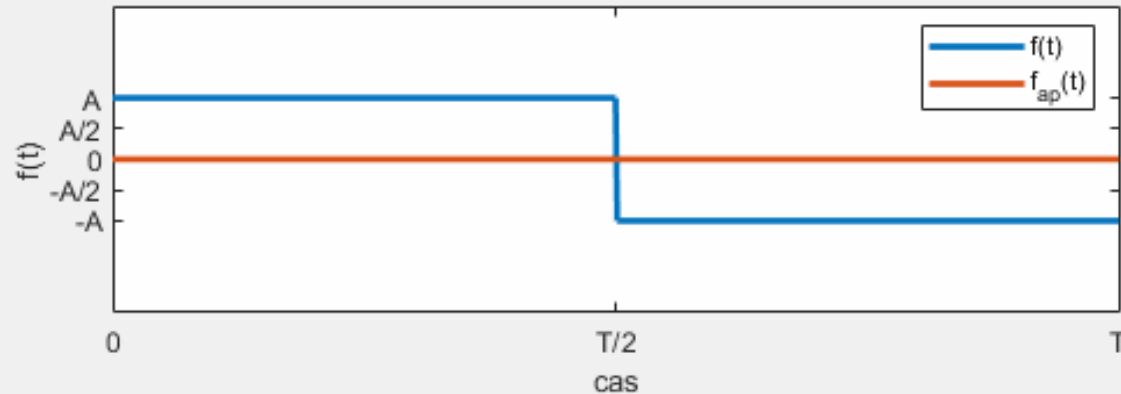
Dá sa ukázať, že minimálne bude pre také  $a_{opt}$  kde derivácia  $\varepsilon$  bude nulová!  $\rightarrow \frac{d\varepsilon}{da} = 0$  (Pozrieť matematiku – praktický význam derivácie!!)

$$\frac{d\varepsilon}{da} = 0 \rightarrow a_{opt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1^2(t) dt}$$

# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázevej funkcie –  $\sin(t)$ .

$$f(t) \cong a_{opt} \Psi_1(t) = a_{opt} \sin(t)$$



Potrebujeme zistiť amplitúdu  $a_{opt}$

Amplitúdu môžeme zisťovať metódou „pokus-omyl“ alebo využiť nejakú optimalizačnú metódu.  
(zrejme nepraktické)

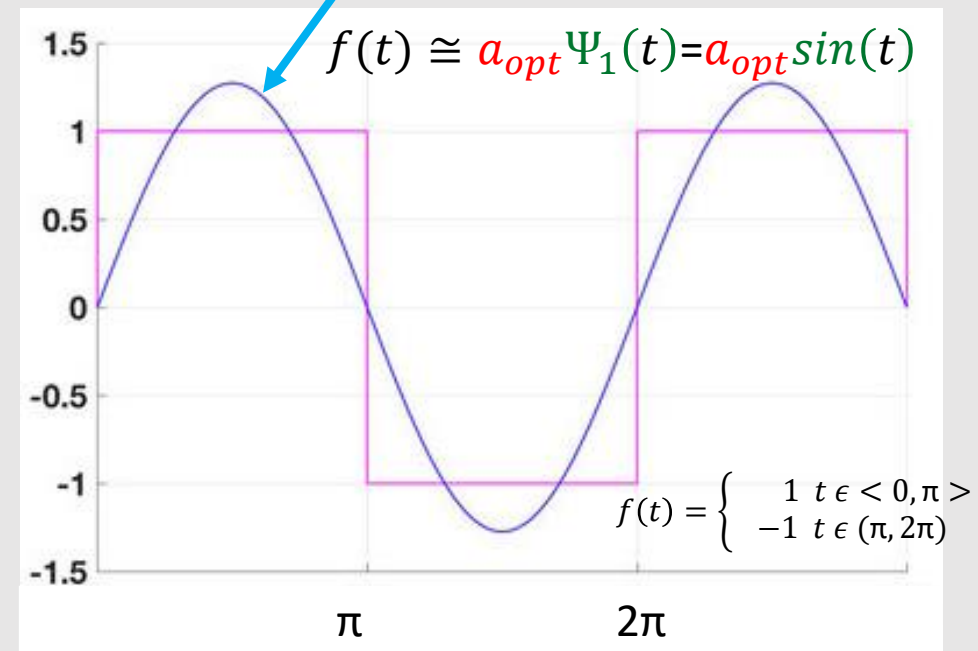
Normovaná chyba sa so zväčšujúcou sa amplitúdou funkcie  $\sin(t)$  znižuje až do momentu, kedy je chyba minimálna. Potom chyba opäť začína rásť.

# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázevej funkcie –  $\sin(t)$ .

$$a_{opt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(t) dt}$$

Potrebuje zistiť amplitúdu  $a_{opt}$



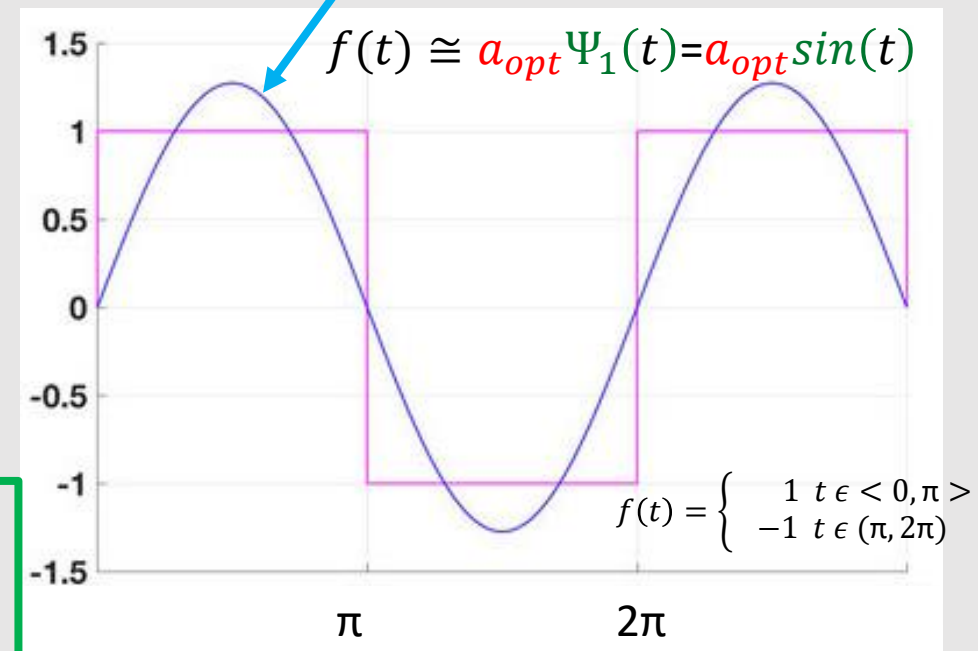
# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázevej funkcie –  $\sin(t)$ .

$$a_{opt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\Psi_1(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1^2(t)dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\sin(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(t)dt} = \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t)dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(t)dt} = \frac{\int_0^\pi \sin(t)dt}{\int_0^\pi \sin^2(t)dt} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

Preto lebo plocha pod krivkou od 0 po  $2\pi$  je rovnaká ako 2 krát plocha pod krivkou v intervale od 0 po  $\pi$ .

Potrebuje zistiť amplitúdu  $a_{opt}$



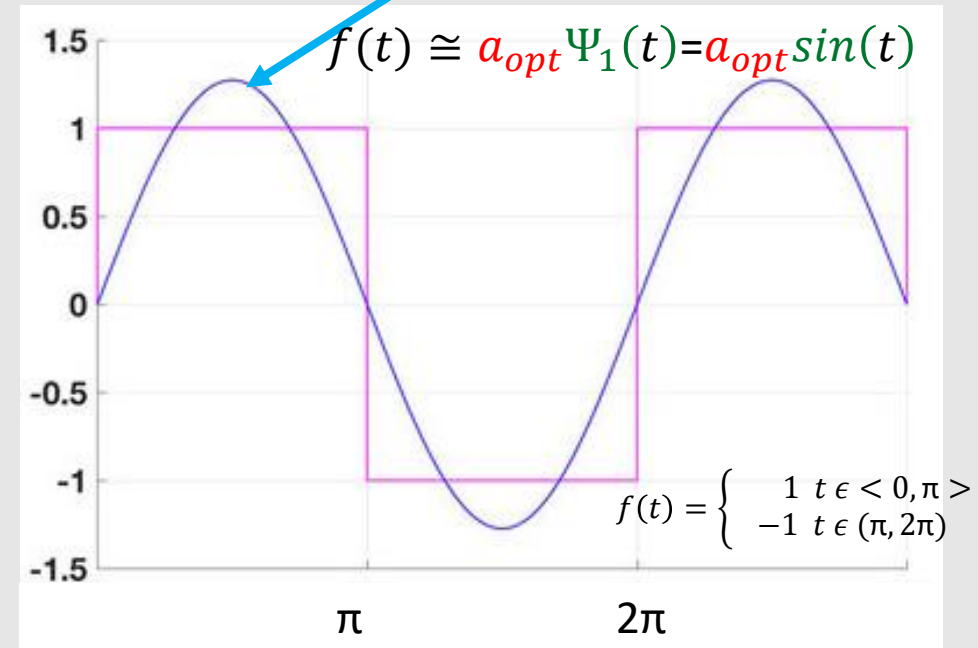
# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázevej funkcie –  $\sin(t)$ .

$$a_{opt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(t) dt} = \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t) dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(t) dt} = \frac{\int_0^\pi \sin(t) dt}{\int_0^\pi \sin^2(t) dt} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

Potrebuje zistiť amplitúdu

$$a_{opt} = \frac{4}{\pi}$$



**WolframAlpha** computational intelligence.

$$\int_0^\pi \sin(t) dt$$

NATURAL LANGUAGE  $\int_0^\pi \sin(t) dt$  MATH INPUT

POPULAR

$$\frac{d}{dx} \quad \frac{d^2}{dx^2} \quad \int \quad \sum \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \quad [a, b, c] \quad \left( \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right)$$

Definite integral

$$\int_0^\pi \sin(t) dt = 2$$

Step-by-step solution

Ak neviem integrovať, použijem nejaký program a nevyhovárať sa, že neviem!!!



# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať iba pomocou jednej bázevej funkcie –  $\sin(t)$ .

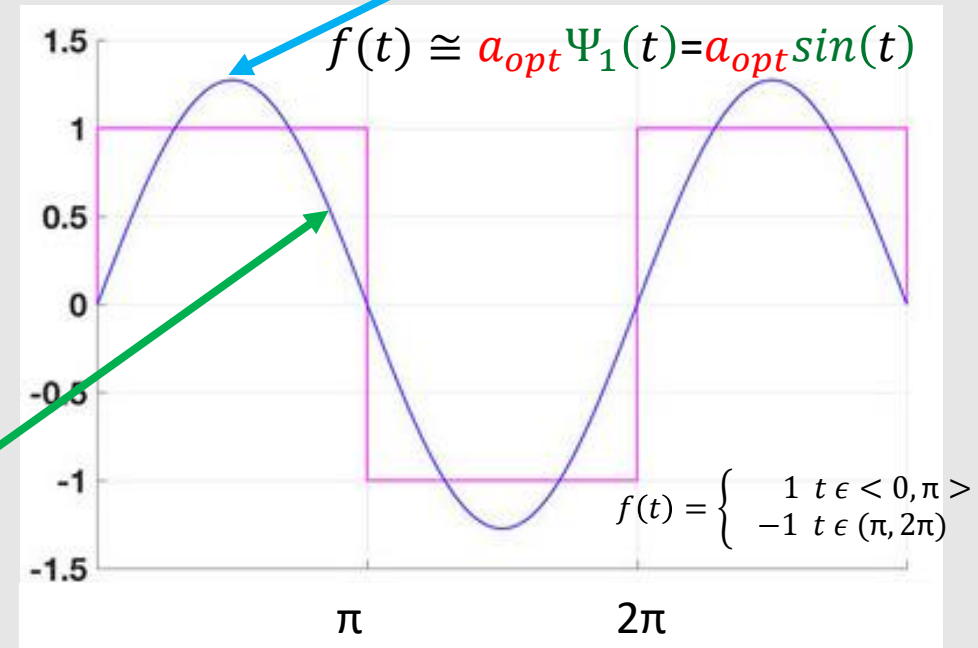
$$a_{opt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_1^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(t) dt} = \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t) dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(t) dt} =$$
$$= \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t) dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(t) dt} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

- Signál môžeme aproximovať nasledovne:

$$f(t) \cong a_{opt} \Psi_1(t) = a_{opt} \sin(t) = \frac{4 \sin(t)}{\pi}$$

Potrebuje zistiť amplitúdu

$$a_{opt} = \frac{4}{\pi}$$



# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Uvažujme, že pravouhlý signál chceme aproximovať pomocou prvých troch bázových funkcií:  $\sin(t)$ ,  $\sin(2t)$  a  $\sin(3t)$ .
- Musíme teda nájsť  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ .
- $a_1$  už poznáme  $\pi/4$
- Pre  $a_2$  bude platiť

Niektoré bázové funkcie v signáli nemusia byť vôbec

$$a_2 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_2^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(2t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(2t) dt} = \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(2t) dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(2t) dt} = \frac{\int_0^\pi \sin(2t) dt}{\int_0^\pi \sin^2(2t) dt} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

- Pre  $a_3$  môžeme písať

$$a_3 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \Psi_3(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \Psi_3^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(3t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(3t) dt} = \frac{2 \int_0^\pi 1 \cdot \sin(3t) dt}{2 \int_0^\pi \sin^2(3t) dt} = \frac{\int_0^\pi \sin(3t) dt}{\int_0^\pi \sin^2(3t) dt} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

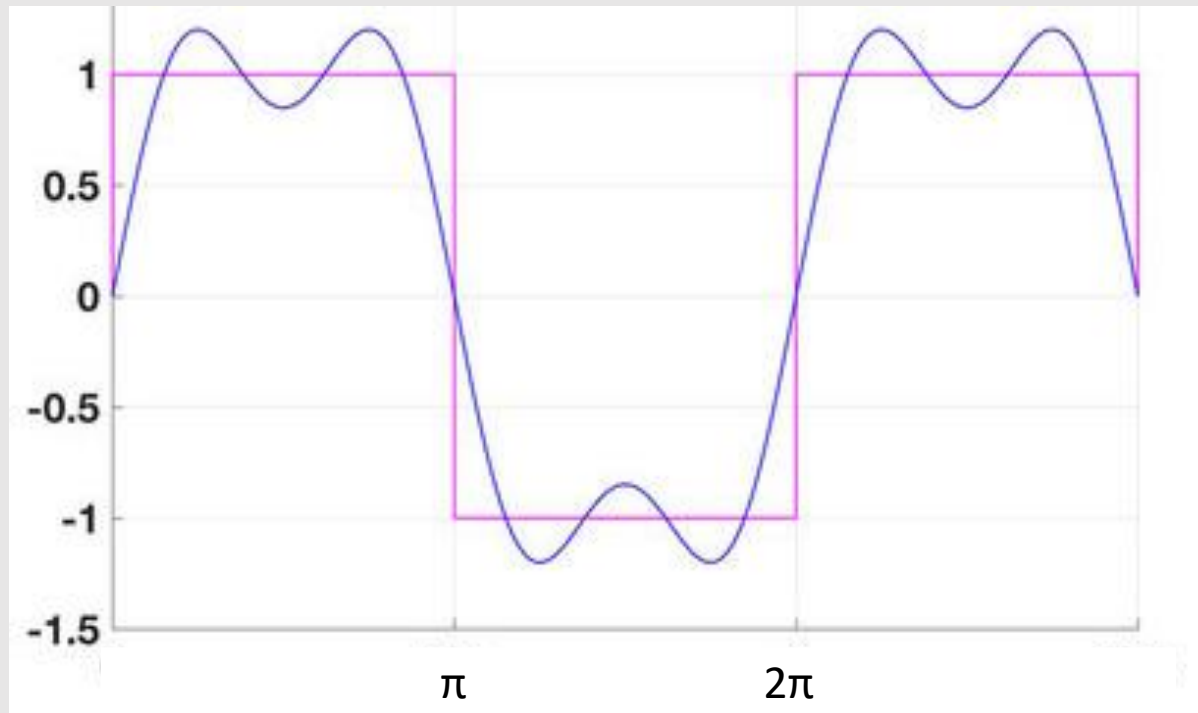
- Signál môžeme aproximovať radom:

$$f(t) \cong a_1 \Psi_1(t) + a_3 \Psi_3(t) = a_1 \sin(1 \cdot t) + a_3 \sin(3 \cdot t) = \frac{4 \sin(t)}{\pi} + \frac{4 \sin(3t)}{3\pi}$$

# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Signál môžeme aproximovať radom:

$$f(t) \cong a_1 \Psi_1(t) + a_3 \Psi_3(t) = a_1 \sin(1 \cdot t) + a_3 \sin(3 \cdot t) = \frac{4 \sin(t)}{\pi} + \frac{4 \sin(3t)}{3\pi}$$



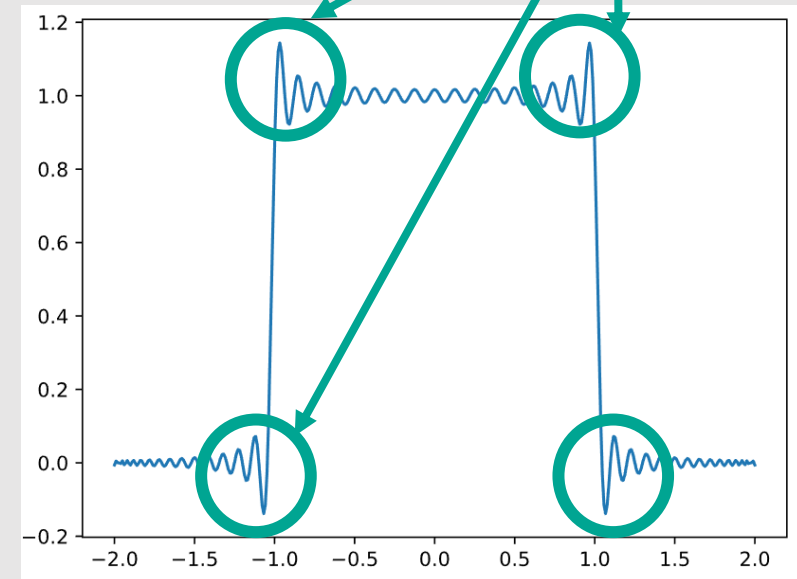
- Dá sa ukázať, že pre daný signál **budú funkcie s párnym  $k$  rovné nule** ( $k=2,4,6\dots$ )
- a pre funkcie s **nepárnym  $k$**  bude aproximačný koeficient  $a_k = \frac{4}{k\pi}$

# Ortogonalita signálov – optimálna aproximácia

- Čím viac bazových funkcii, tým lepšia bude aproximácia.
- Dá sa ukázať, že pre daný signál budú funkcie s párnym  $k$  rovné nule ( $k=2,4,6\dots$ )
- a pre funkcie s nepárnym  $k$  bude aproximačný koeficient  $a_k = \frac{4}{k\pi}$
- Pokiaľ nebude použitých nekonečne veľa harmonických funkcii (čo v podstate nie je možné), aproximácia nebude s nulovou chybou. Pri aproximácií pomocou harmonických signálov v miestach nespojitosti dochádza ku **Gibbovmu javu**.

$$f(t) \cong \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Psi_k(t) = a_0 \Psi_0(t) + a_1 \Psi_1(t) + a_2 \Psi_2(t) + \dots$$

Tento rad nazývame **zovšeobecnený Fourierov rad**. Zovšeobecnený preto lebo tento zápis cez funkcie  $\Psi_k$  uvažuje ľubovoľné ortogonálne systémy. Rad je konvergentný a pozostáva z nekonečného počtu funkcii a ich príslušných koeficientov.





# Signály a sústavy

## Prednáška č. 2

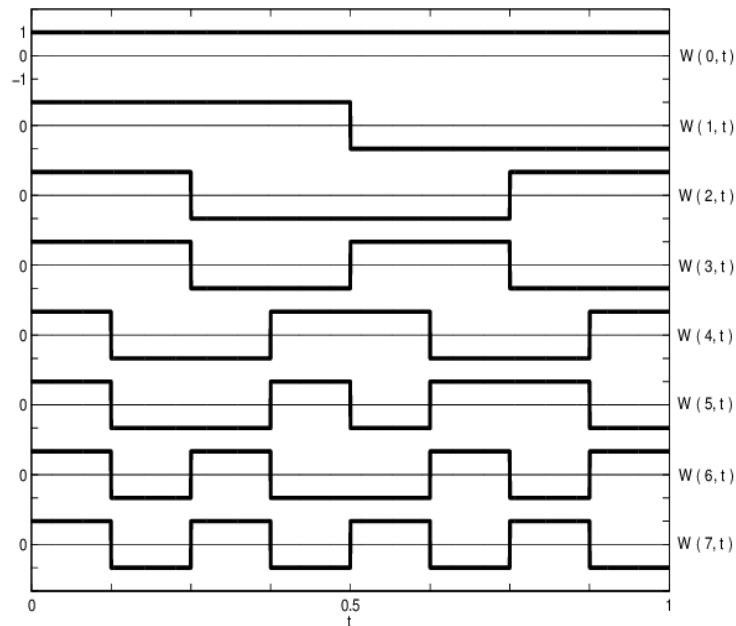
- Aktualizácia
- Ortogonalita signálov
- Aproximácia signálu
- **Systémy ortogonálnych funkcií**

# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

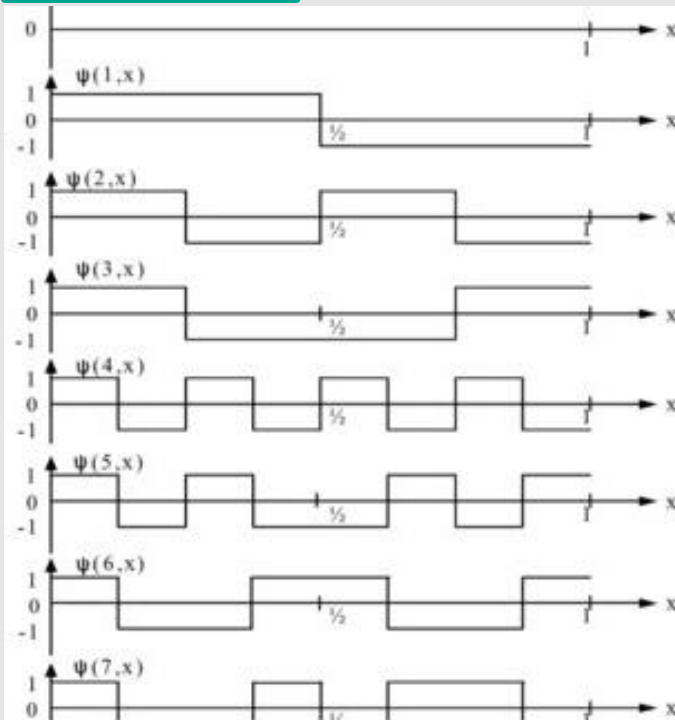
- Existuje mnoho systémov ortogonálnych funkcií.
- Medzi najznámejšie funkcie patria **Haarové, Walshové, Rademacherové, Waveletové ...**
- Systémy môžu byť **úplné (uzavreté)** alebo **neúplné**.
- Úplný systém je taký, ktorý spĺňa podmienku, že **neexistuje taká funkcia  $u(t)$ , pre ktorú platí nasledovné:**

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) \Psi_k(t) dt = 0$$

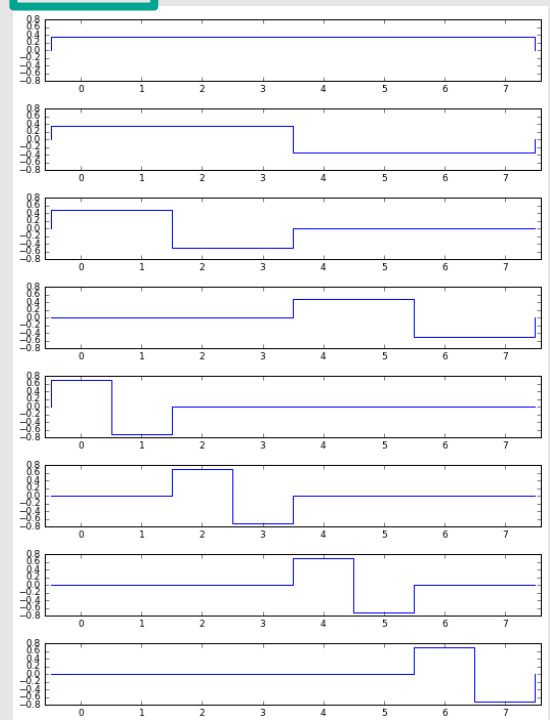
Walsh



Rademacher



Haar



# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

## Haarové ortogonálne funkcie

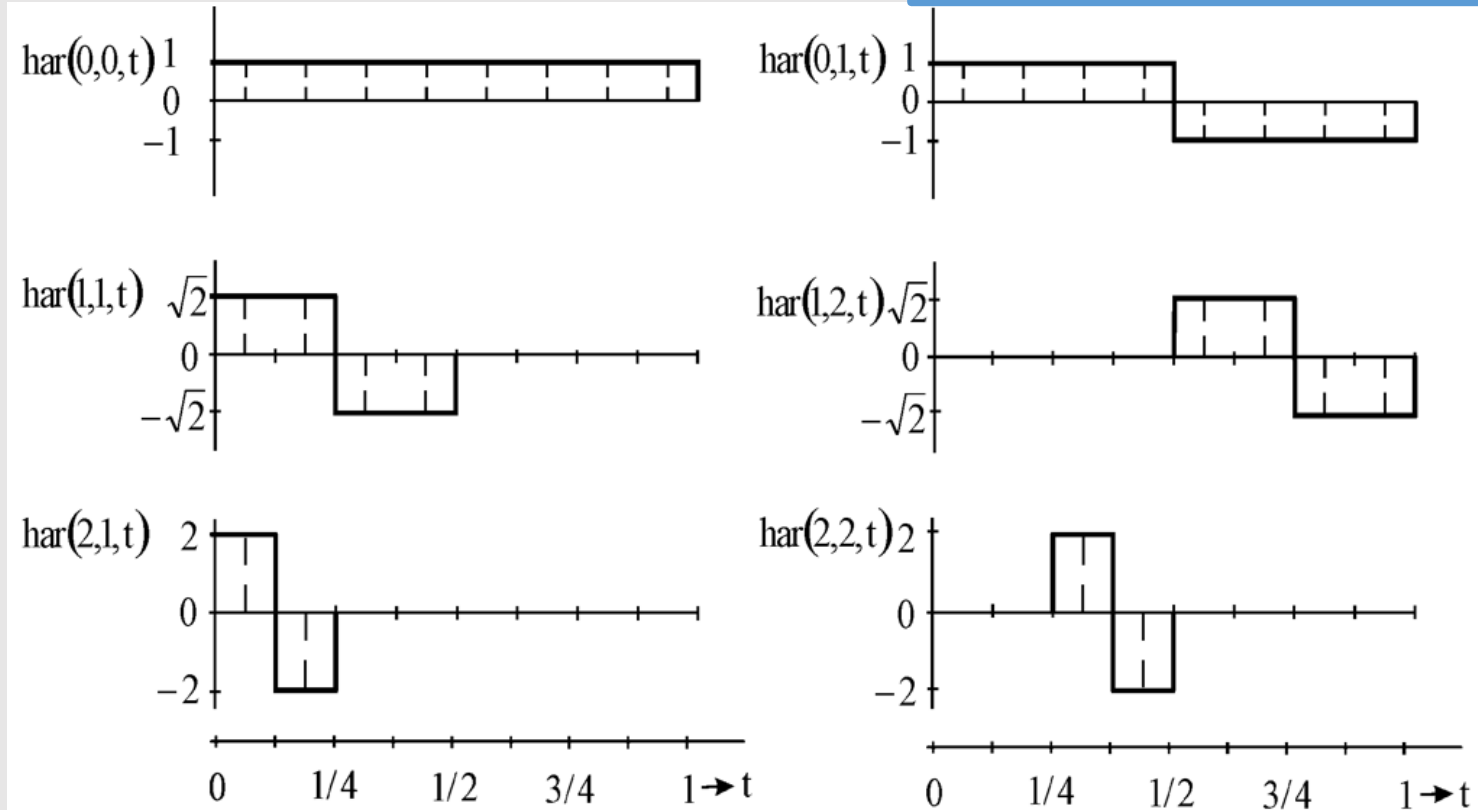
- Haarove funkcie  $\text{har}(k,k',t)$  tvoria **úplný systém ortogonálnych funkcií**, pričom ich hodnoty môžu byť celistvé mocniny  $\sqrt{2}$  napr.:

$$0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2 \dots$$



Funkcie boli navrhnuté Alfrédom Haarom v roku 1909.

### Prvých 6 Haarových funkcií



# Ortogonalita signálov – Systémy ortogonálnych funkcií

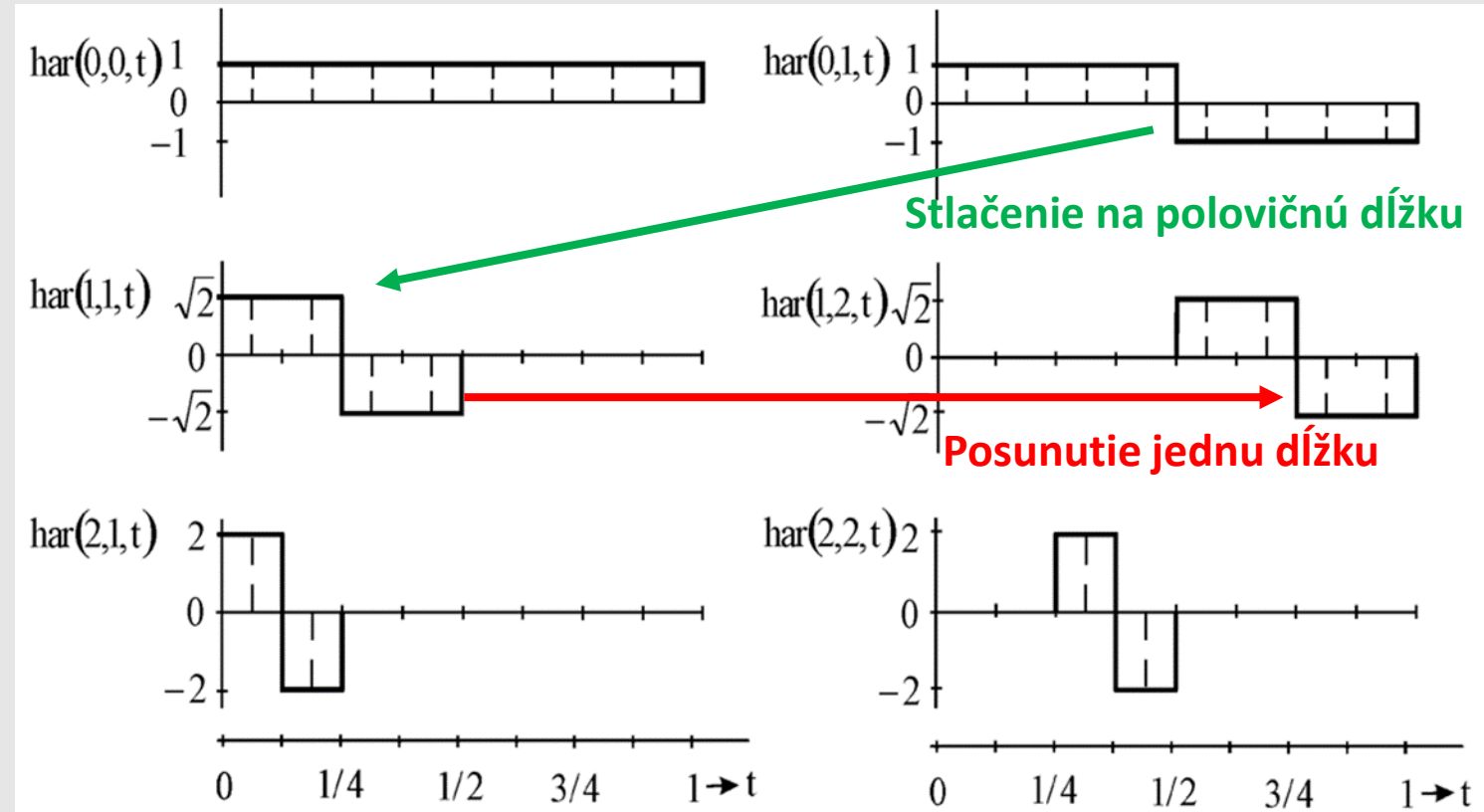
## Haarové ortogonálne funkcie

- Haarove funkcie  $\text{har}(k, k', t)$  tvoria **úplný systém ortogonálnych funkcií**, pričom ich hodnoty môžu byť celistvé mocniny  $\sqrt{2}$  napr.:

$$0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2 \dots$$

- Každá nasledujúca Haarova funkcia počnúc  $\text{har}(0, 1, t)$  sa získava pomocou **operácie stlačenia (zmeny mierky)** a vhodného **posunutia predchádzajúcej funkcie**.

Prvých 6 Haarových funkcií





# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

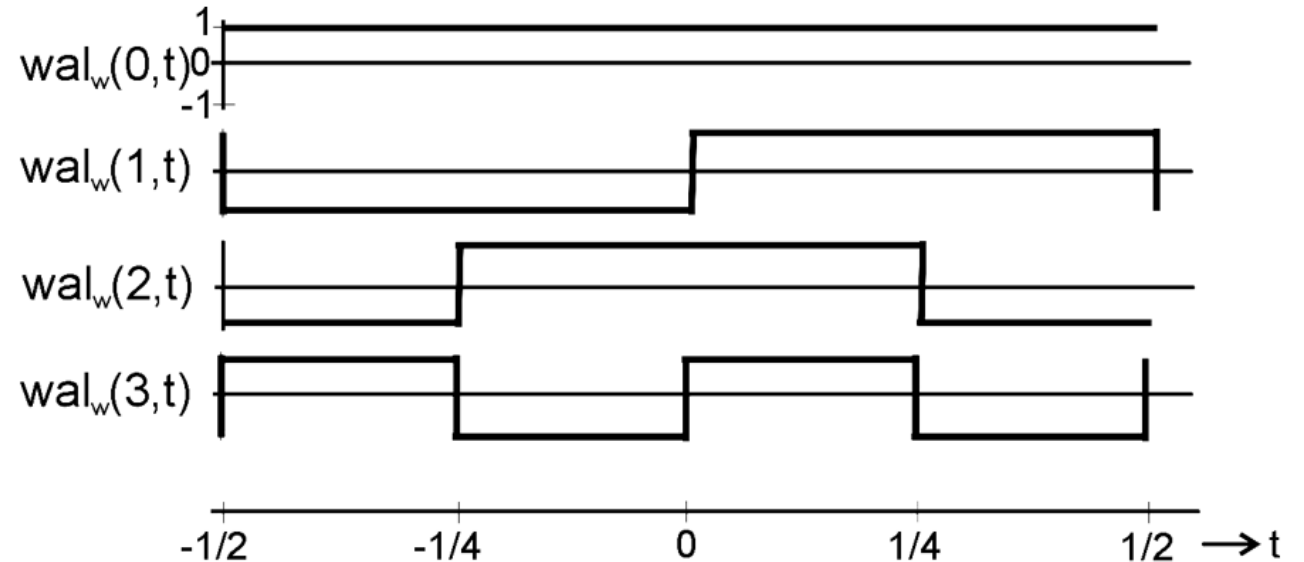
## Walshové ortogonálne funkcie

- Walshove funkcie (WF)  $wal(k, t)$  predstavujú **úplný systém ortonormálnych funkcií** na polootevorenom intervale  $t \in (-0.5, 0.5)$ , pričom tento systém je periodický s periódou 1.



Funkcie boli navrhnuté Josephom L. Walshom v roku 1923.

Prvé 4 Walshové funkcie

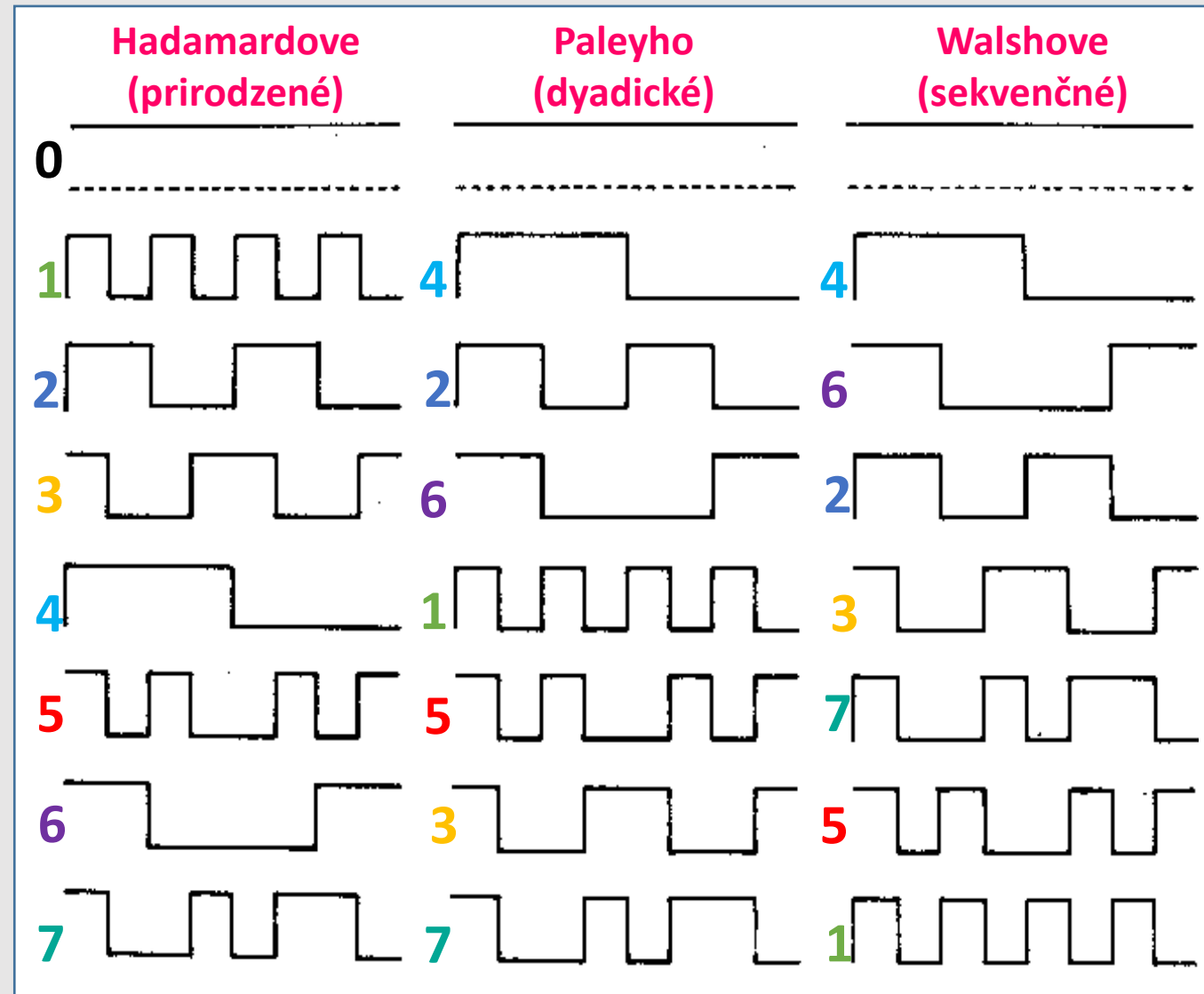


- Výhoda použitia WF je v tom, že sú jednoduché a nadobúdajú len celočíselne hodnoty, tým umožňujú veľmi rýchle výpočty.

# Ortogonalita signálov – Systémy ortogonálnych funkcií

## Walshové ortogonálne funkcie

- Walshove funkcie (WF)  $wal(k, t)$  predstavujú **úplný systém ortonormálnych funkcií** na polootvorenom intervale  $t \in (-0.5, 0.5)$ , pričom tento systém je periodický s periódou 1.
- Výhoda použitia WF je v tom, že sú jednoduché a nadobúdajú len celočíselne hodnoty, tým umožňujú veľmi rýchle výpočty.
- Walshové funkcie je podľa požiadaviek ich aplikácie preusporiadať. Poznáme usporiadanie:
  - Walshove (sekvenčné):  $wal_w(k, t)$
  - Paleyho (dyadické):  $wal_p(k, t)$
  - Hadamardove (prirodzené):  $wal_h(k, t)$



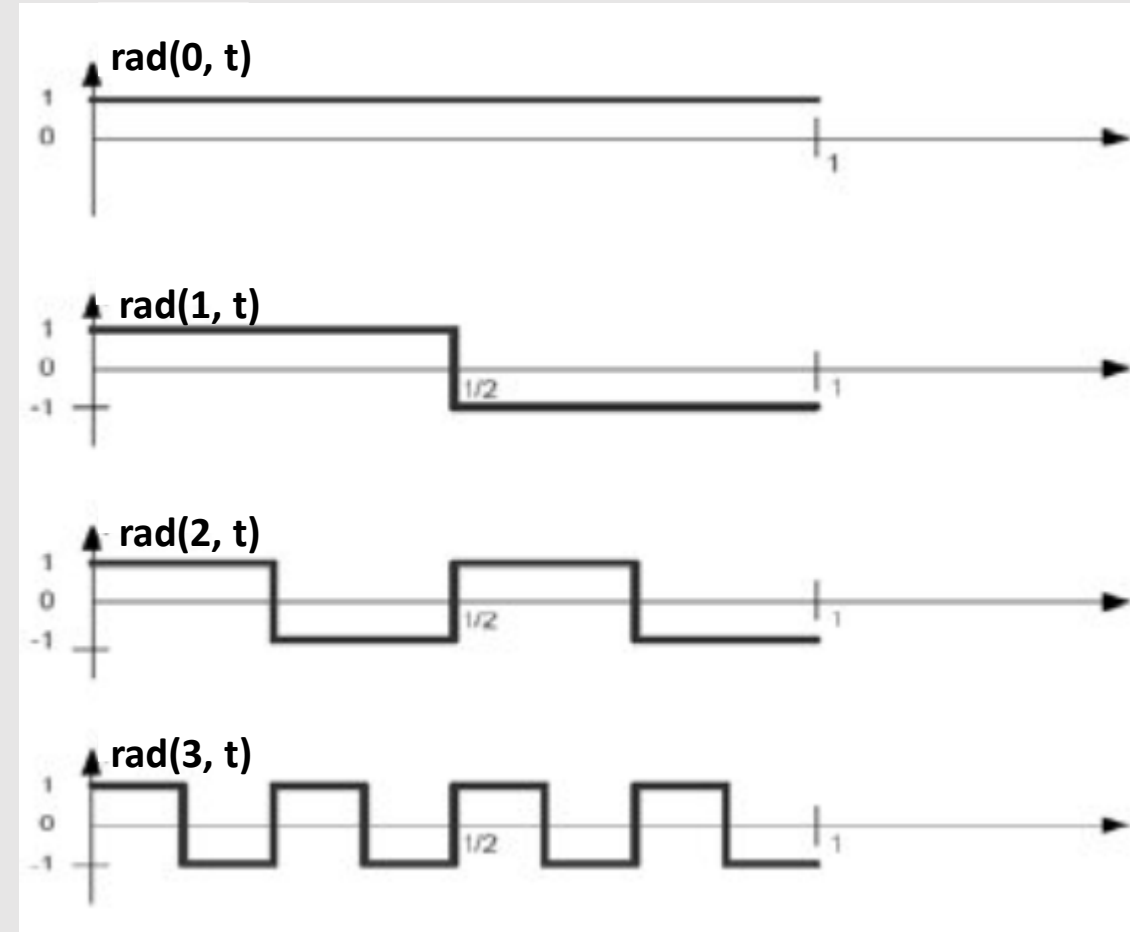
# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

## Rademacherové ortogonálne funkcie

- Rademacherové funkcie (RF)  $\text{rad}(k, t)$  predstavujú **neúplný** systém ortonormálnych funkcií na polootevorenom intervale  $t \in [0, 1)$ , pričom tento systém je periodický s periódou 1.



Prvé 4 Rademacherové funkcie



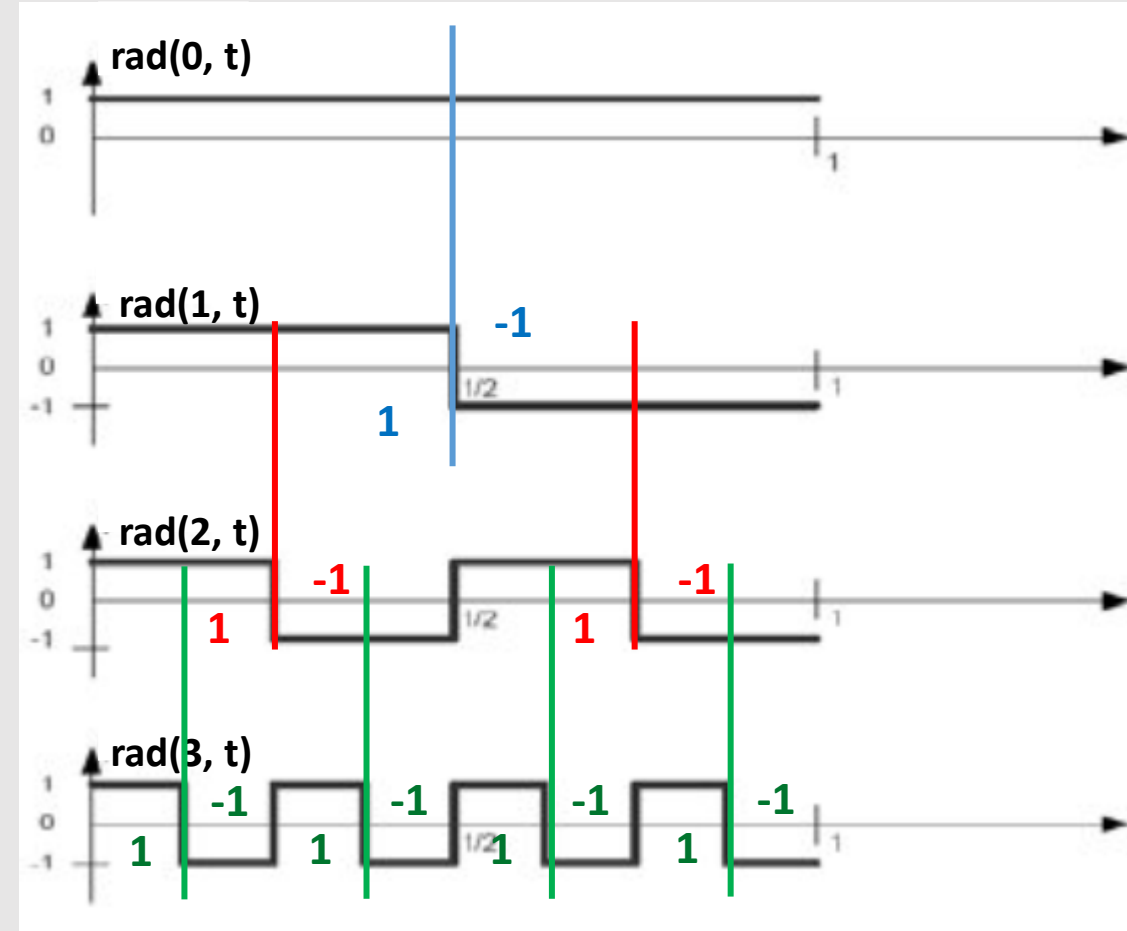
Funkcie boli navrhnuté Hansom Rademacherom v roku 1922.

# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

## Rademacherové ortogonálne funkcie

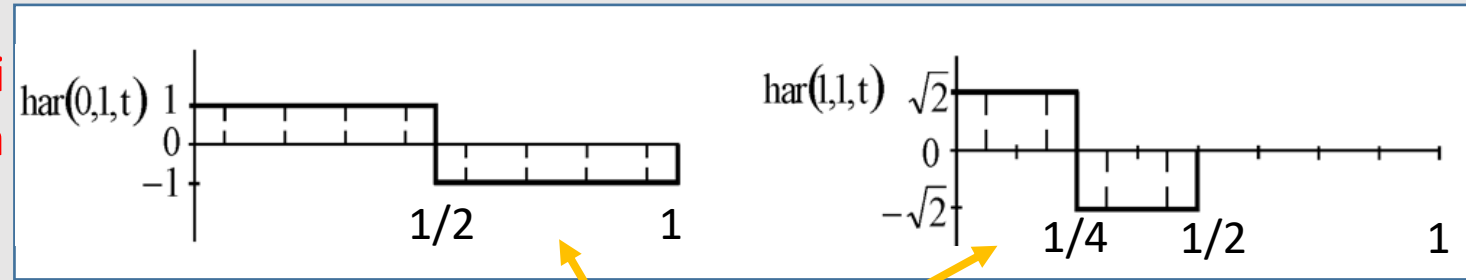
- Rademacherové funkcie (RF)  $\text{rad}(k, t)$  predstavujú **neúplný** systém ortonormálnych funkcií na polootvorenom intervale  $t \in [0, 1)$ , pričom tento systém je periodický s periódou 1.
- Každá ďalšia funkcia počnúc  $\text{rad}(1, t)$  je generovaná tak, že sa jednotlivé časti predchozej funkcie rozdelia na polovicu a nahradia sa sekvenciou 1 a -1.

Prvé 4 Rademacherové funkcie



# Ortogonalita signálov – Systémy ortogonálnych funkcií

- **Príklad:** Overte ortogonalitu medzi dvoma Haarovými funciami **har(0,1,t)** a **har(1,1,t)**.



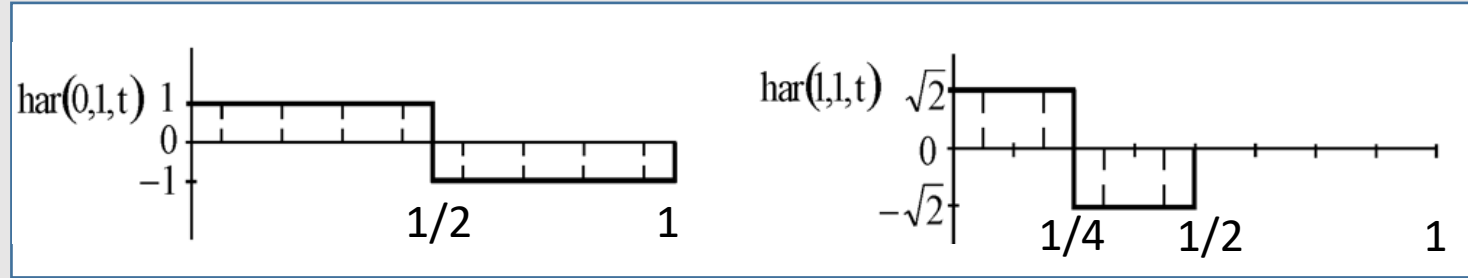
$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \neq k \\ K & \text{pre } j = k \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \text{har}(0,1,t) \text{har}(1,1,t) dt = ?$$

Najprv musíme popísať tieto dve funkcie!

# Ortogonalita signálov – Systémy ortogonálnych funkcií

- **Príklad:** Overte ortogonalitu medzi dvoma Haarovými funciami **har(0,1,t)** a **har(1,1,t)**.



$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \neq k \\ K & \text{pre } j = k \end{cases}$$

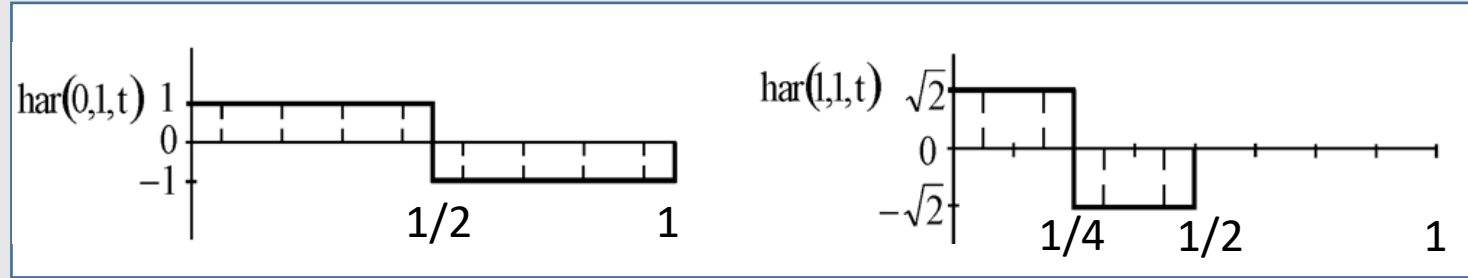
$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \text{har}(0,1,t) \text{har}(1,1,t) dt = ?$$

$$\text{har}(0,1,t) = \begin{cases} 1; & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$\text{har}(1,1,t) = \begin{cases} \sqrt{2}; & t \in (0, \frac{1}{4}) \\ -\sqrt{2}; & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 0; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

- **Príklad:** Overte ortogonalitu medzi dvoma Haarovými funciami **har(0,1,t)** a **har(1,1,t)**.



$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \neq k \\ K & \text{pre } j = k \end{cases}$$

$$\text{har}(0,1,t) = \begin{cases} 1; & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

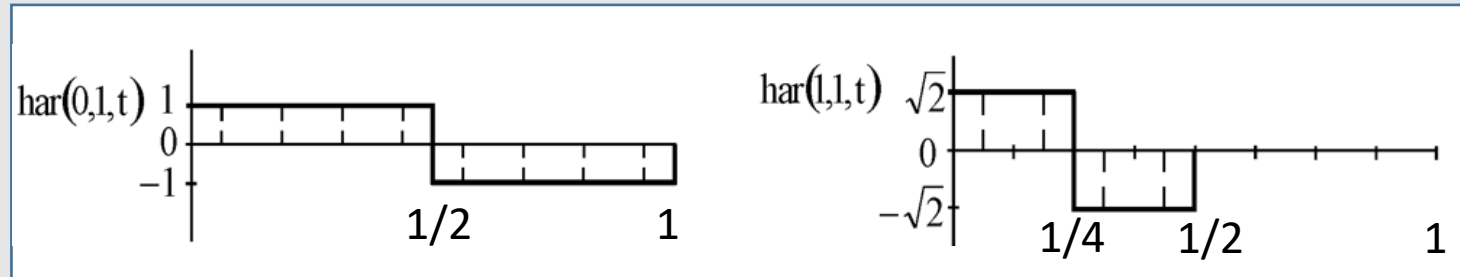
$$\text{har}(1,1,t) = \begin{cases} \sqrt{2}; & t \in (0, \frac{1}{4}) \\ -\sqrt{2}; & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 0; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \text{har}(0,1,t) \text{har}(1,1,t) dt = ?$$

Teraz môžeme prepísať integrál a dopísať hranice, v ktorých to má zmysel integrovať.

# Ortogonalita signálov – Systemy ortogonálnych funkcií

- **Príklad:** Overte ortogonalitu medzi dvoma Haarovými funciami **har(0,1,t)** a **har(1,1,t)**.



$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \neq k \\ K & \text{pre } j = k \end{cases}$$

$$\text{har}(0,1,t) = \begin{cases} 1; & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad \text{har}(1,1,t) = \begin{cases} \sqrt{2}; & t \in (0, \frac{1}{4}) \\ -\sqrt{2}; & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 0; & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \text{har}(0,1,t) \text{har}(1,1,t) dt = \int_0^1 \text{har}(0,1,t) \text{har}(1,1,t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} 1\sqrt{2} dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 1(-\sqrt{2}) dt = \\ &= \sqrt{2} \left\{ [t]_0^{\frac{1}{4}} - [t]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

**Sú ortogonálne!**

- Dá sa ukázať, že K je nenulové pre druhú podmienku.
- **Domáca úloha:** Overte ortonormalitu!



# Ďakujem za pozornosť!

**Nabudúce:**

- Spektrálna analýza signálov
- Fourierová transformácia

