Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 9

- Lifting implementácia DWT
- 2D DWT
- Vybrané oblasti využitia DWT

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

DWT – Lifting implementácia

- Liftingová schéma predstavuje výhodný spôsob realizácie výpočtov v bankách filtrov.
- Jednoducho opisuje závislosti medzi pármi filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter.
- Poskytuje postup, ako môžeme začať z triviálneho prípadu **„lenivého“ waveletu** a postupne vybudovať pár filtrov s požadovanými vlastnosťami. Odtiaľ pochádza aj názov „lifting“, t. j. „dvíhanie“ **vlastností waveletov**.
- Pomocou liftingu získané wavelety sa zvyknú nazývať aj **wavelety druhej generácie**.
- **Liftingová schéma umožňuje efektívne realizovať klasickú DWT s nasledovnými výhodami**:
  - urýchlenie implementácie (napr. v 1D prípade až dvojnásobne), označovaná ako **rýchla DWT**
  - jednoduchý návrh vlastných waveletov
  - **spätná DWT** môže byť získaná bezprostredne z priamej DWT zámenou poradia operácií a výmenou každého znamienka plus za mínus a naopak.
  - možnosť ľahko získať **celočíselnú DWT**, ktorá má jednoduchú technickú implementáciu (zaokruhľovanie hodnôt) a umožňuje bezstratovú kompresiu
  - možnosť **vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte**
  - Oproti klasickej konvolúcii ponúka lifting metóda **menšiu výpočtovú náročnosť**
  - Vychádza sa z impulzných charakteristík filtrov a prejde sa ku štruktúre, ktorá sa skladá iba z jednoduchých operácii - Tomuto prechodu sa hovorí faktorizácia a výsledkom sú lifting koeficienty.

DWT – Lifting implementácia

Časová LIFTING implementácia DWT

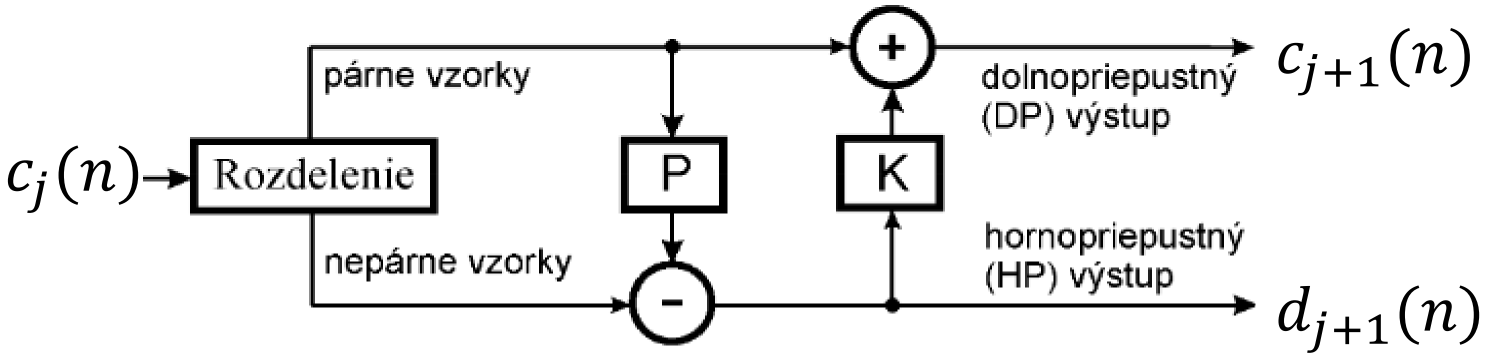
- Využíva biortogonálnu banku filtrov
- Impulzné charakteristiky musia spĺňať **podmienku biortogonality** (Ortogonálne do kríža)

$$\boxed{\sum_n g_0(n)h_1(n) = 0} \quad \boxed{\sum_n g_1(n)h_0(n) = 0}$$

DWT – Lifting implementácia (LI)

Časová LIFTING implementácia DWT

- Uvažujme BF pre implementáciu DWT s Haarovým waveletom
- Ďalej uvažujme, že postupnosť $x(n) = c_j(n)$. Túto postpunosť rozložíme na aproximačné koeficienty $c_{j+1}(n)$ a detailové koeficienty $d_{j+1}(n)$.
- Jeden stupeň priamej LI DWT pozostáva z 3 krokov:
  - Rozdelenie vzoriek do dvoch vetiev
  - Predikia (P)
  - Korekcia (K)



V **bloku prediktora (P)** sa používa **postupnosť párnych vzoriek** na predikciu (predpovedanie hodnoty) postupnosti nepárnych vzoriek.
Cieľom je získanie čo najmenších hodnôt vzoriek na hornopriepustnom (HP) výstupe tohto stupňa.

- Odčítaním predikovanej hodnoty od aktuálnej hodnoty vzorky vedie k získaniu detailu – to ako sa od seba líšia (teda HP filter).

$$d_{j+1}(n) = b_j(n) - p_1[a_j(n) + a_j(n-1)], \quad p_1 = \frac{1}{2}$$

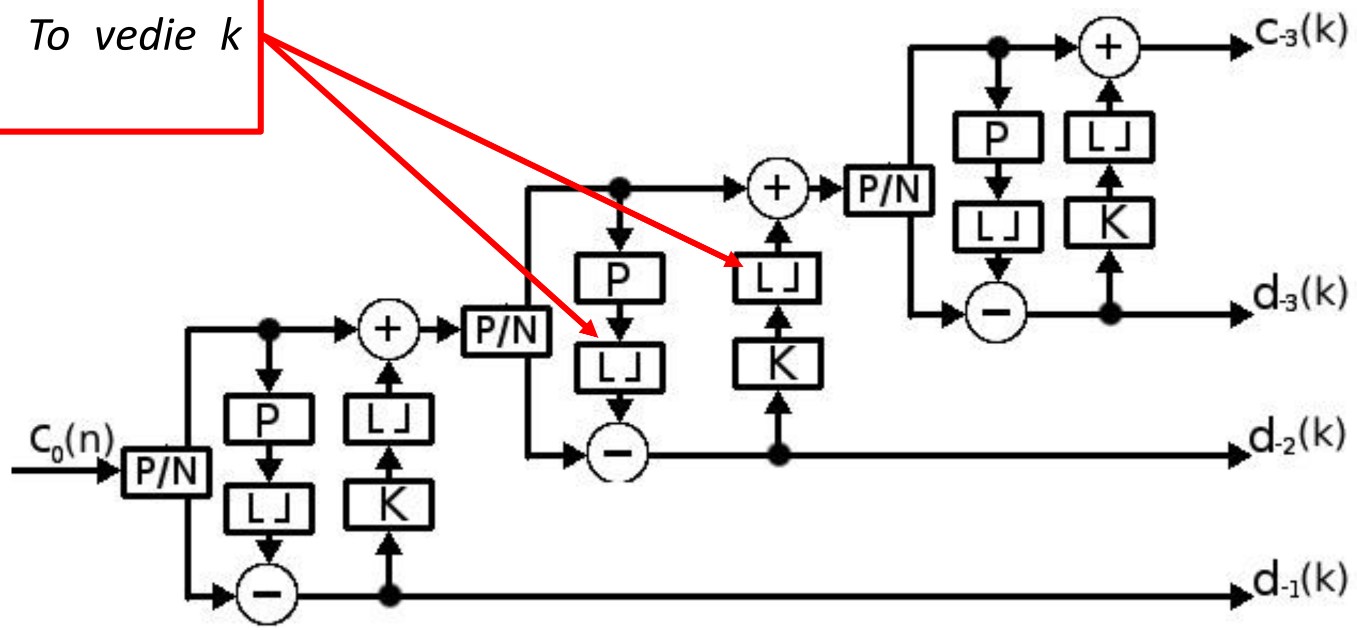
Výstupné vzorky z bloku korektora (K) menia hodnoty párnych vzoriek na základe nepárnych tak, aby čo najvernejšie odzrkadľovali vlastnosti celej vstupnej postupnosti, t.j. aby predikcia bola účinná aj pri ďalších krokoch.

$$c_{j-1}(n) = a_j(n) + k_1[d_{j-1}(n-1) + d_{j-1}(n)], \quad k_1 = \frac{1}{4}$$

DWT – Viacúroňová Lifting implementácia

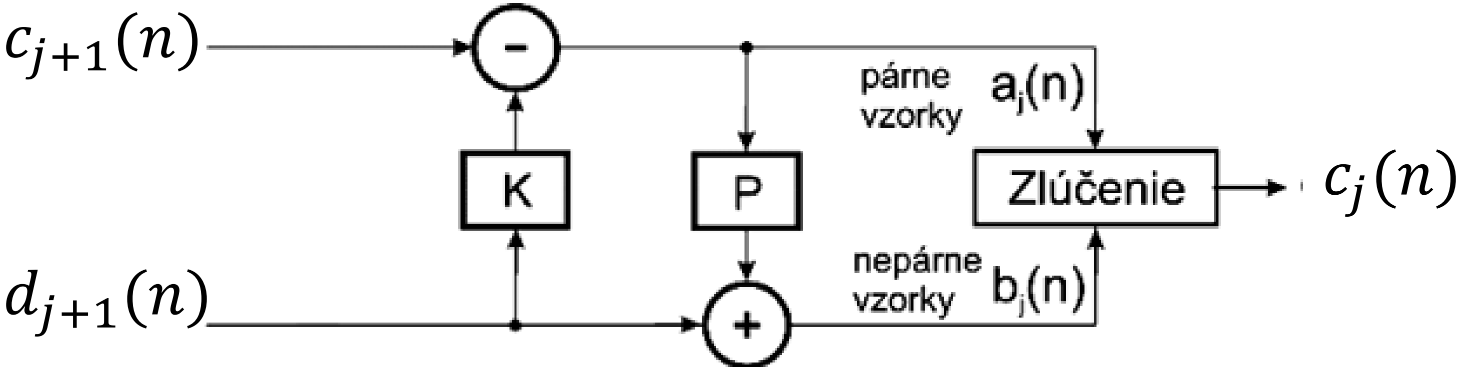
Viacúrovňová LI DWT je vykonaná aplikáciou rovnakého rozkladového stupňa na aproximačné subpásma

Výstup z prediktora a korektora môže byť zaokrúhlený. To vedie k celočíselnej LI DWT



DWT – Lifting implementácia (LI)

Spätná LI DWT je vykonaná aplikáciou rovnakých krokov ako pri priamej DWT ale tieto kroky sú v opačnom poradí so zámenou znamienok pri súčtových operáciách.



Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

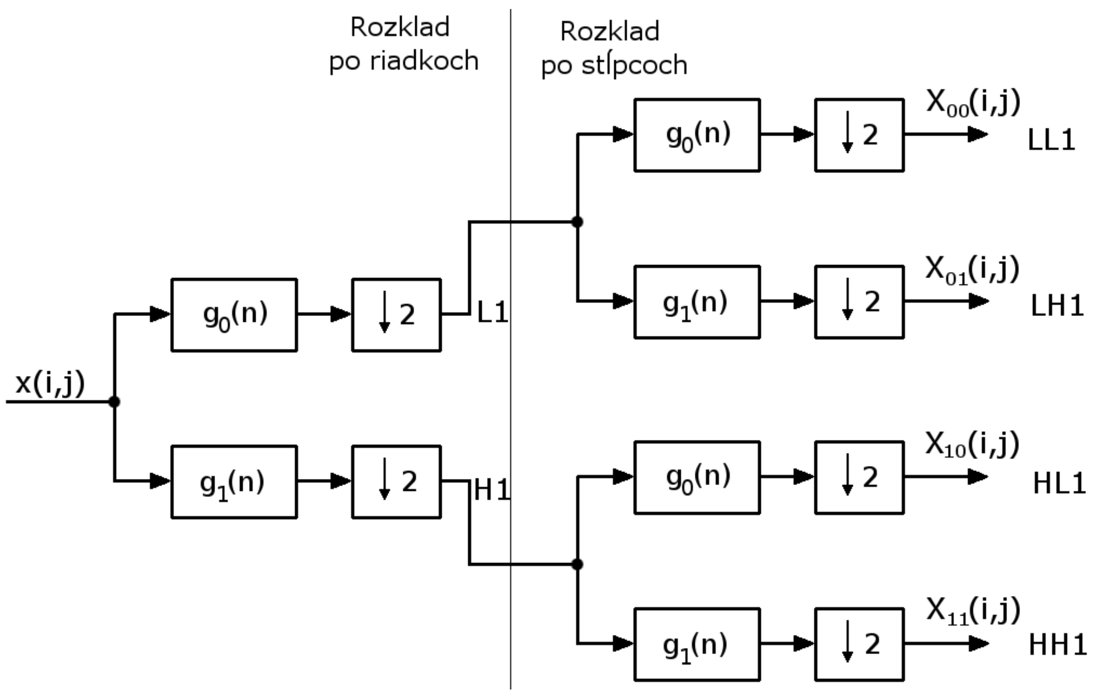
Prednáška č. 9

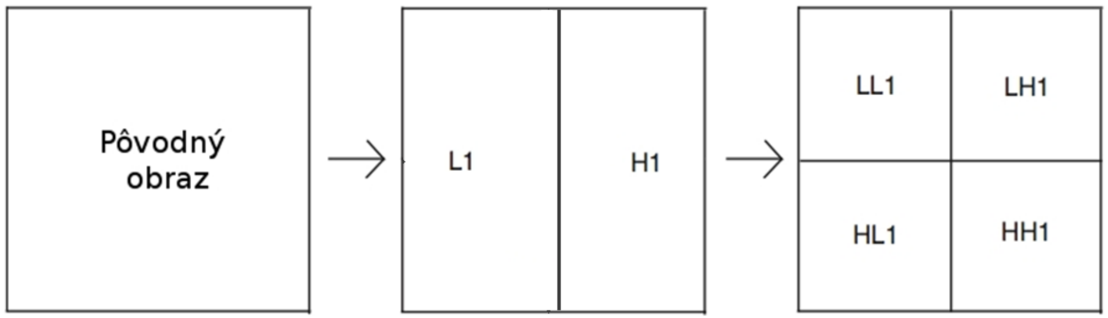
- Lifting implementácia DWT
- **2D DWT**
- Vybrané oblasti využitia DWT

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

2D DWT

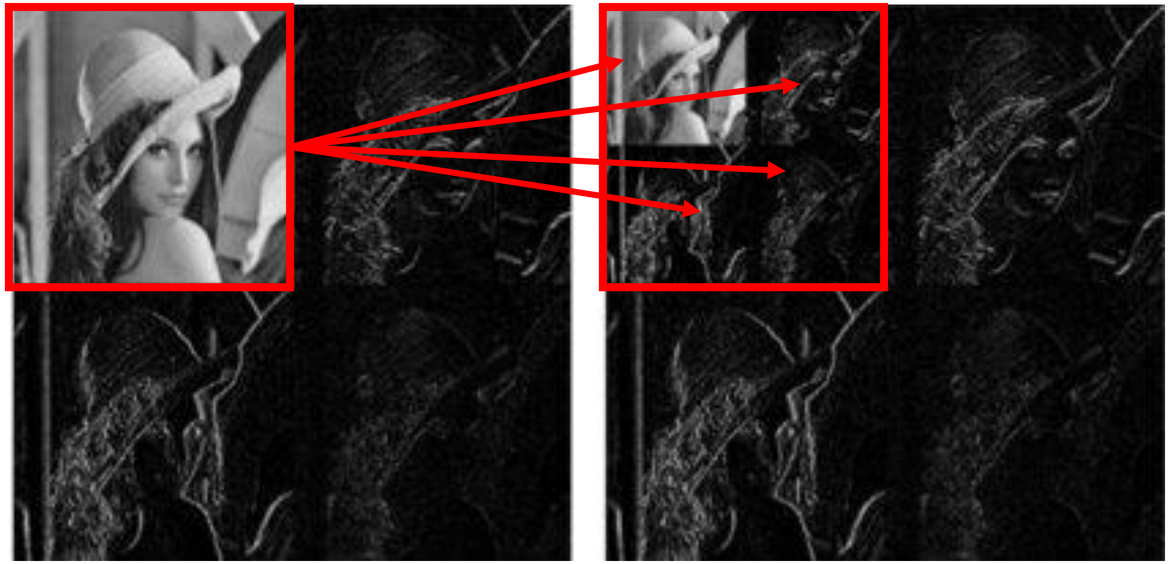
- **Dvojrozmernú DWT** je možné využiť na signály dvoch nezávislých premenných (najčastejšie obraz).
- 2D DWT obrazu je získaná aplikáciou 1D DWT na riadky obrazu a následne na stĺpce obrazu. **Hovoríme, že jadro transformácie je separovateľné.**

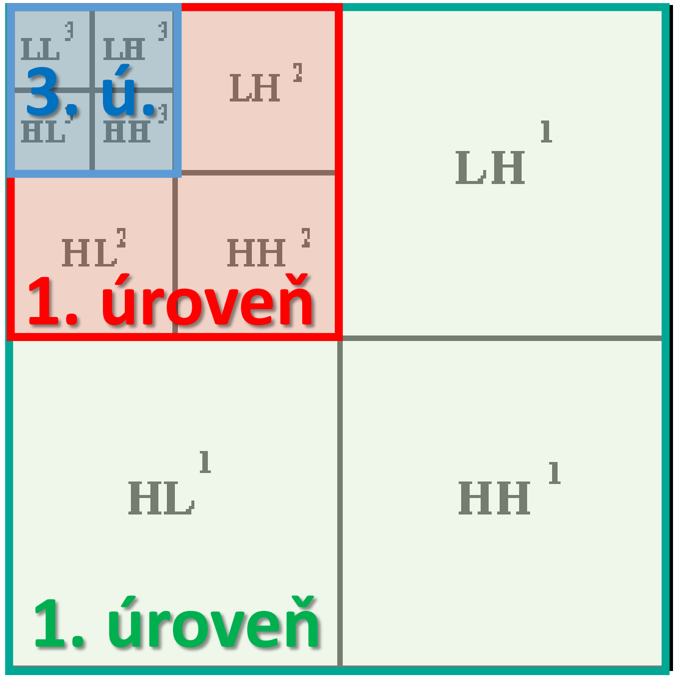




2D DWT

- Ďalším rozkladom aproximačnej časti je získaná dvoj a viacúrovňová 2D DWT.





Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 9

- Lifting implementácia DWT
- 2D DWT
- **Potláčanie šumu**

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Vybrané oblasti využitia DWT – Potláčanie šumu

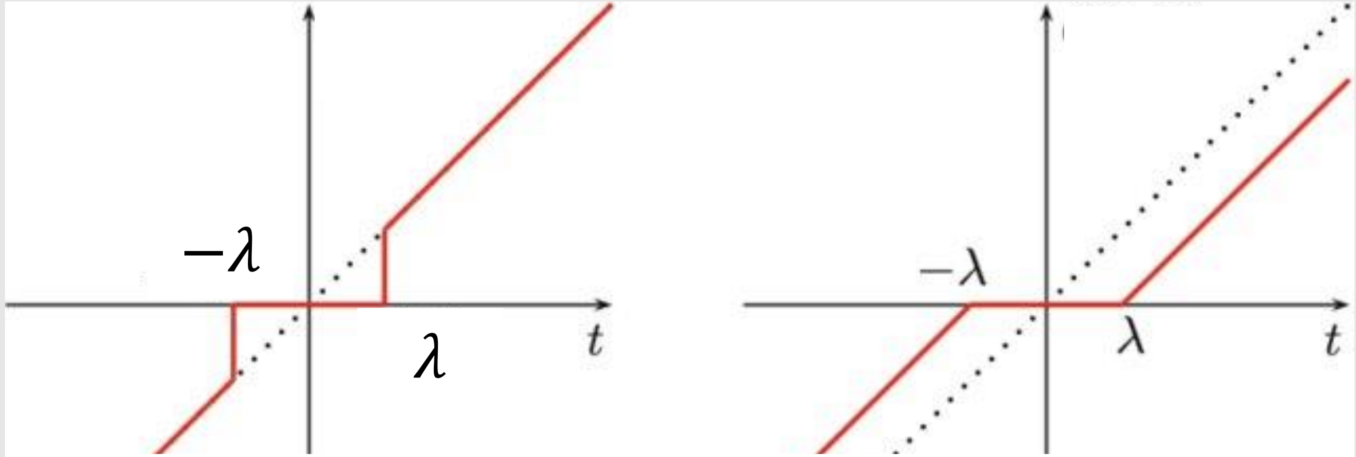
- DWT je možné využiť pri potláčaní šumu v signáloch (obrazoch).
- Využíva sa
  - Tvrdé prahovanie
  - Mäkké prahovanie

- Princíp tvrdého prahovania spočíva v potlačení rozkladových koeficientov, ktorých absolútna hodnota je nižšia ako zvolený prah (λ).

$$\tilde{x} = \begin{cases} x \ ak \ |x| > \lambda \\ 0 \quad\quad\quad inde \end{cases}$$

- Mäkké prahovanie je definované nasledovne:

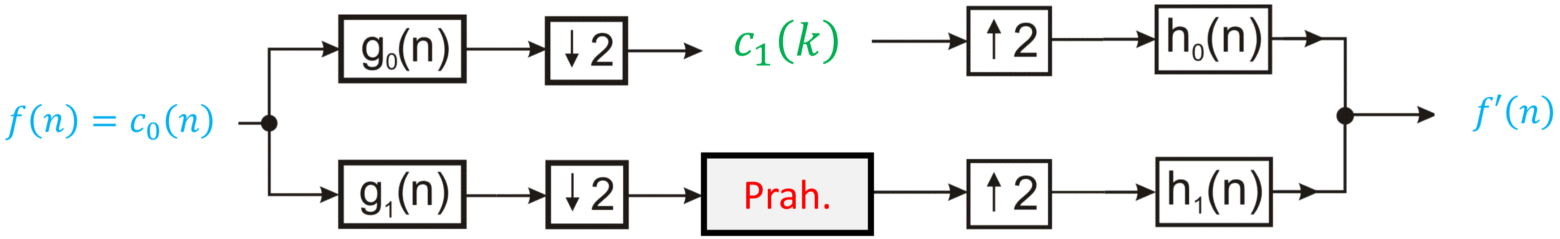
$$\tilde{x} = \begin{cases} znamineko(x)[\,|x| - \lambda] \quad ak \ |x| > \lambda \\ 0 \quad\quad\quad inde \end{cases}$$



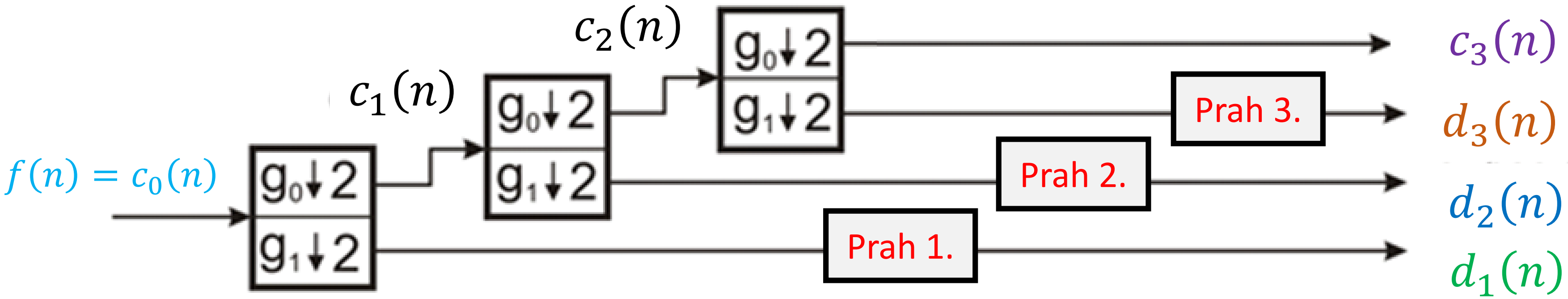
- Nevýhodou tvrdého prahovania je to, že v odšumenom signáli môžu vzniknúť prechody.
- Voľbu prahu pre úpravu koeficientov je vhodné nastaviť s ohľadom na typ šumu a teda s ohľadom na jeho smerodajnú odchýlku
- **Univerzálny prah** (pôvodne odvodený pre biely šum s Gaussovým rozložením) $\lambda = \sigma\sqrt{2\log(N)}$
- Prah je možné upravovať násobením konštantou – **empirický prah** $\lambda = K\sigma$

Vybrané oblasti využitia DWT – Potláčanie šumu

- Uvažujme zašumený signál.
- Na tento signál aplikujeme DWT
- Na detailové koeficienty aplikujeme prahovú filtráciu
- Signál sa rekonštruuje pomocou spätenej DWT



- Šum možno potláčať na viacerých úrovniach (pretože úrovne predstavujú rôzne frekvenčné pásma)



Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 10

- **Predikcia signálov**
- Estimácia signálov

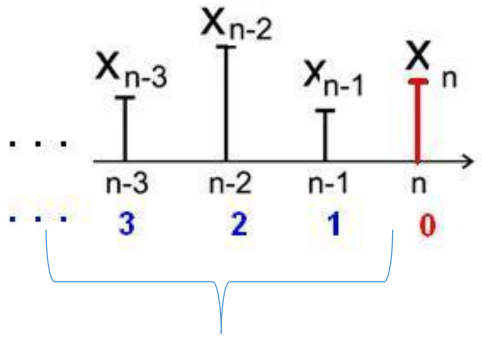
Ing. Ondrej Kováč, PhD.

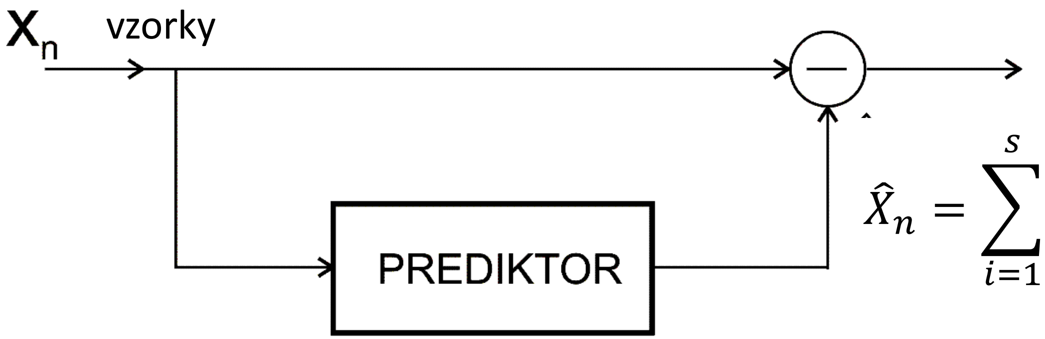
Predikcia signálov

Predikcia (predpoveď) vzoriek signálu súvisí s predikčnými metódami kompresie údajov.

- odstraňuje štatistickú redundanciu (nadbytočnosť) reprezentovanú korelovanosťou (väzbou) medzi vzorkami

- **predikcia nie je vhodná pre nekorelované vzorky!**





$$e_n = X_n - \hat{X}_n$$

$$\hat{X}_n = \sum_{i=1}^{s} p_i X_{n-i}$$

p_i – predikčné koeficienty, s – rád prediktora, tj. počet predchádzajúcich vzoriek použitých na predikciu

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 10

- Predikcia signálov
- **Estimácia signálov**

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Estimácia signálov

Pri spracovaní **zašumených signálov** môžeme vykonávať **estimáciu (odhad) vzoriek užitočného signálu (filtrácia)** alebo aspoň niektorých jeho parametrov.

Rozlišujeme:

- **Lineárnu**
- **nelineárnu estimáciu**

Iné rozdelenie:

- rekurzívna (so spätnou väzbou)
- nerekurzívna (bez spätnej väzby)

Obmedzíme sa preto len na **výklad lineárnej estimácie**, a to: Estimácia – buď parametra alebo vzoriek signálu

Nerekurzívna lineárna estimácia parametrov

Nerekurzívna (bez spätnej väzby) estimácia sa realizuje pomocou lineárnej kombinácie určitého počtu vzoriek zašumeného signálu.

Konkrétne estimujme amplitúdu (parameter) *jednosmerného náhodného signálu* (opísaný náhodnou premennou A) pohlteného v šume. Predpokladajme, že dĺžka signálu je ***s*** vzoriek. Za predpokladu aditívneho šumu **vzorky zašumeného signálu sú**

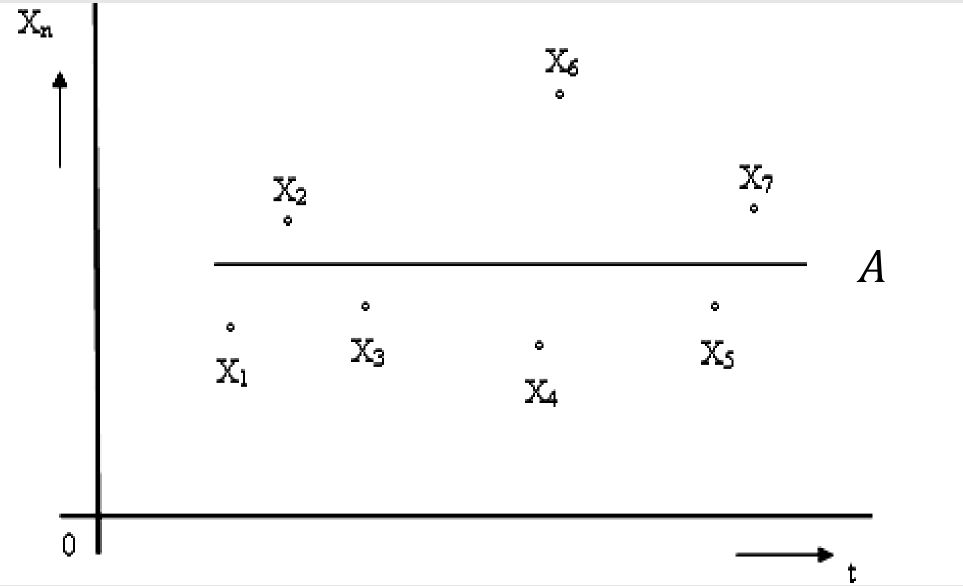
$$X_n = A + V_n$$

kde V_n sú vzorky šumu.
Estimácia jednosmerného signálu bude nasledovná:

$$\hat{A} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} X_i$$

- Chyba estimácie je:

$$e = A - \hat{A} = A - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} X_i$$



Stredná kvadratická chyba estimácie je daná ako:

$$\sigma_e^2 = E(e^2) = E\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{N} V_i\right)^2 = \frac{\sigma_v^2}{s}$$

Zo vzťahu vyplýva, že s nárastom počtu vzoriek (s) bude chyba menšia a estimácia presnejšia.

Nerekurzívna lineárna estimácia parametrov

Estimácia jednosmerného signálu pomocou aritmetického priemeru nie je optimálna vzhľadom na minimalizáciu strednej kvadratickej hodnoty chyby.

$$\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

- Preto sa využíva nasledovný vzťah:

$$\hat{A} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} d_i X_i$$

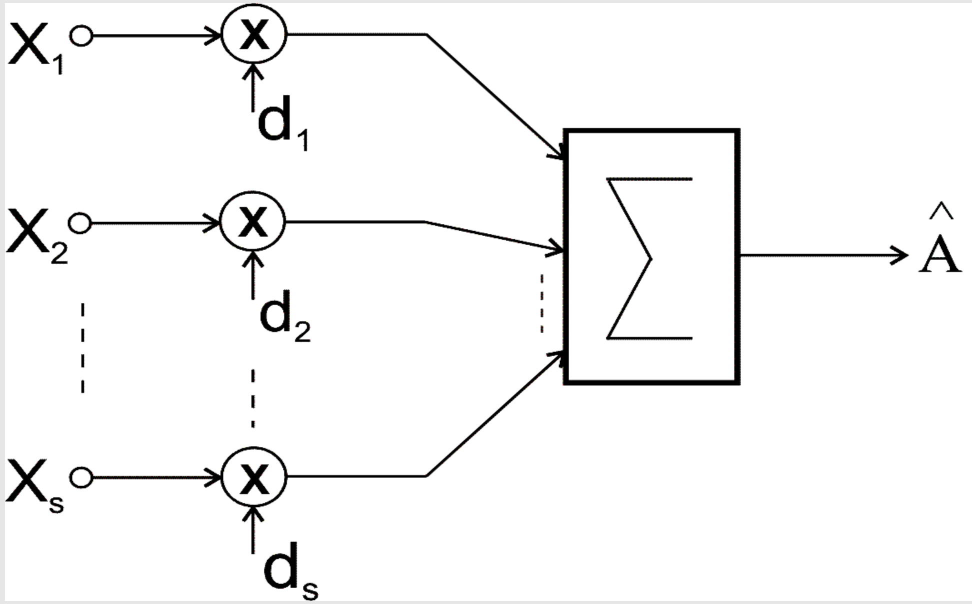
d_i sú estimačné koeficienty, ktoré určíme tak, aby σ_e^2 *bolo minimálne*.

Dá sa ukázať, že ak

$$\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 = \ldots = \mathrm{d}_s = \frac{1}{\mathrm{s}+\mathrm{b}}$$

potom je stredná kvadratická chyba daná nasledovne:

$$\sigma_e^2 = E\left[\left(A - \hat{A}\right)^2\right] = \frac{\sigma_\mathrm{v}^2}{\mathrm{s}+\mathrm{b}}$$



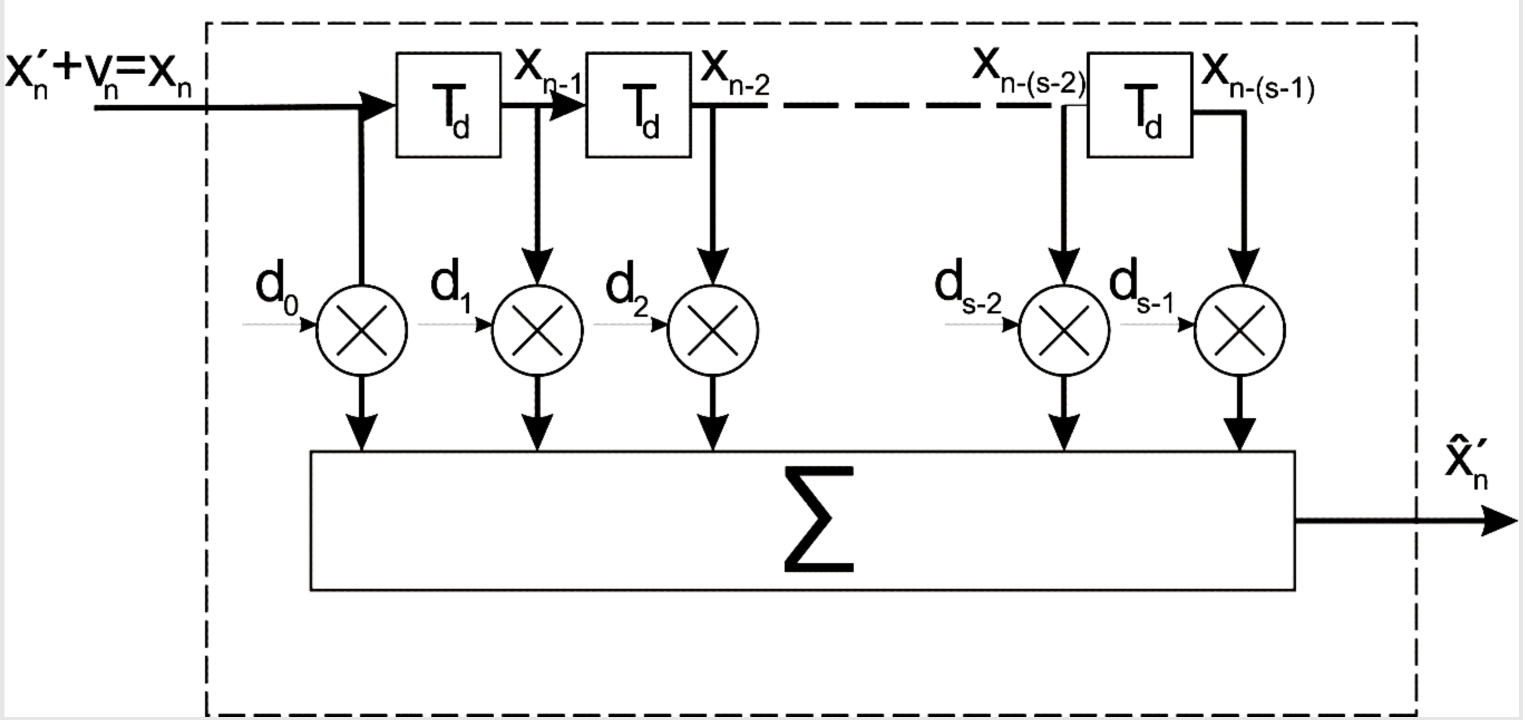
Je zrejmé, že

$$\frac{\sigma_\mathrm{v}^2}{\mathrm{s}+\mathrm{b}} < \frac{\sigma_v^2}{s}$$

v prípade optimálnej nerekurzívnej lineárnej estimácie sa chyba *zmenšuje* aj vplyvom „b“ v menovateli.

Nerekurzívna lineárna estimácia diskrétnych signálov

Pri tejto estimácii sa užitočná hodnota (vzorka) $\hat{x}'_i$ spracovávanej zašumenej vzorky $x_i = x'_i + v_i$ estimuje pomocou lineárnej kombinácie **tejto vzorky** a niekoľkých predchádzajúcich vzoriek zašumeného signálu:



$$\hat{X}'_n = \sum_{i=0}^{s-1} d_i X_{n-i}$$

Bloková schéma nerekurzívneho lineárneho estimátora (tj. **Wienerov filter**) s-tého rádu (k estimácii sa používa „s“ zašumených vzoriek)

Rekurzívna lineárna estimácia parametrov

Princíp rekurzívnej lineárnej estimácie spočíva v rekonštrukcii (oprave) minulých estimácií pomocou spracovávaných (prítomných) vzoriek zašumeného signálu. Tým sa značne redukuje zložitosť a čas výpočtu

Vychádzajúc zo vzťahu pre optimálnu nerekurzívnu lineárnu estimáciu s+1 rádu, ktorej zodpovedá stredná kvadratická chyba

$$\hat{A}_{s+1} = \sum_{i=1}^{s+1} d_i X_i \qquad \sigma_e^2(s+1) = \frac{\sigma_v^2}{(s+1)+b} \qquad \text{pričom } d_i = \frac{1}{(s+1)+b}$$

sa dá dokázať, že estimáciu $\hat{A}_{s+1}$ je možné vypočítať rekurzívne z predchádzajúceho odhadu $\hat{A}_s$ a aktuálnej zašumenej vzorky x_{s+1}.

$$\hat{A}_{s+1} = \frac{g_{s+1}}{g_s}\hat{A}_s + g_{s+1}X_{s+1} = h_{s+1}\hat{A}_s + g_{s+1}X_{s+1}$$

Kde pre g_s a g_{s+1} platí:

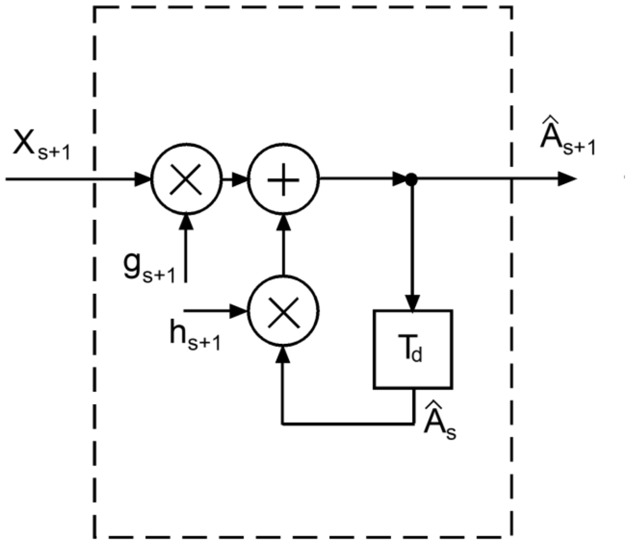
$$g_s = \frac{\sigma_e^2(s)}{\sigma_v^2} \qquad g_{s+1} = \frac{g_s}{g_s + 1}$$

Rekurzívna lineárna estimácia parametrov

$$\boxed{\hat{A}_{s+1} = h_{s+1}\hat{A}_s + g_{s+1}X_{s+1}}$$ $$\boxed{g_s = \frac{\sigma_e^2(s)}{\sigma_v^2}}$$ $$\boxed{g_{s+1} = \frac{g_s}{g_s + 1}}$$ $$\boxed{h_{s+1} = \frac{g_s + 1}{g_s}}$$

z rov. vyplýva, že estimačná amplitúda $\hat{A}_{s+1}$ sa získa korekciou predchádzajúcej estimácie $\hat{A}_s$ a rekonštrukciou prítomnej zašumenej vzorky X_{s+1} pomocou korekčného člena.

- Normovaná stredná kvadratická estimačná chyba g_{s+1} sa zmenšuje s narastajúcim rádom „s" , pričom sa $\hat{A}_{s+1}$ bude stabilizovať na určitej hodnote.
- Bloková schéma rekurzívneho lineárneho estimátora amplitúdy A je nasledovná:



Rekurzívna lineárna estimácia parametrov

Rekurzívny algoritmus estimácie parametra môžeme výhodne použiť aj pri estimácii diskrétnych signálov. V tomto prípade sa bude jednať o Kalmanovú filtráciu.

Uvažujme stacionárny diskrétny signál s nulovou strednou hodnotou, pričom tento budeme modelovať pomocou autoregresívneho procesu prvého rádu

$$X'_n = c\,X'_{n-1} + W_n$$

kde c je *časová konštanta* a W_n sú *vzorky bieleho šumu* v tomto procese

Ďalej predpokladajme zašumenie stacionárneho diskrétneho signálu, ktorý modelujeme s autoregresívnym procesom prvého rádu pomocou *aditívneho bieleho šumu* V_n, teda

$$X_n = X'_n + V_n$$

tento biely šum (V_n) musíme odlišovať od bieleho šumu v modeli pre X'_n - (W_n)

Rekurzívna lineárna estimácia diskrétneho signálu je opísaná rovnicou

$$\hat{X}'_n = h_n \hat{X}'_{n-1} + g_n X_n$$

Rekurzívna lineárna estimácia parametrov

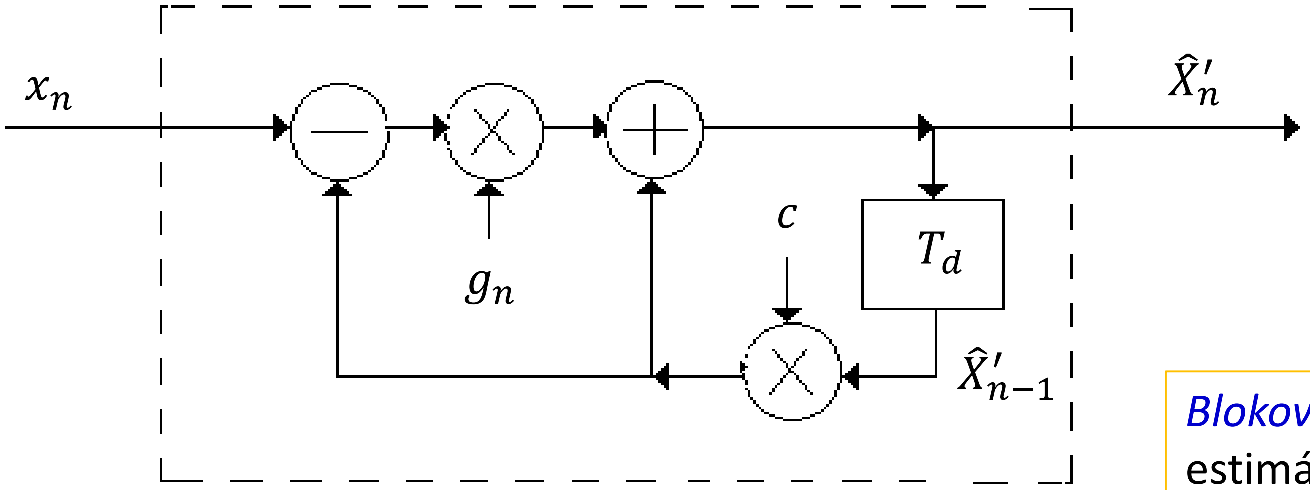
Rekurzívna lineárna estimácia diskrétneho signálu je opísaná rovnicou, z ktorej vidno, že estimačná vzorka užitočného signálu $\hat{X}'_n$ sa vypočíta pomocou predchádzajúcej estimácie užitočnej vzorky $\hat{X}'_{n-1}$ a spracovávanej (prítomnej) zašumenej vzorky X_n.

$$\boxed{\hat{X}'_n = h_n\hat{X}'_{n-1} + g_nX_n = c\hat{X}'_{n-1} + g_n\left(X_n - c\hat{X}'_{n-1}\right)}$$

$h_n = c(1-g_n)$

reprezentuje predikciu vzorky užitočného signálu pomocou predchádzajúcich vzoriek signálu.

reprezentuje *korekciu*, ktorú vypočítame súčinom koeficientu g_n s rozdielom spracovávanej zašumenej vzorky X_n a predikčnej vzorky X_n.



Bloková schéma rekurzívneho lineárneho estimátora (**Kalmanovho filtra**)

Rekurzívna lineárna estimácia parametrov

Rekurzívna lineárna estimácia diskrétneho signálu je opísaná rovnicou, z ktorej vidno, že estimačná vzorka užitočného signálu $\hat{X}'_n$ sa vypočíta pomocou predchádzajúcej estimácie užitočnej vzorky $\hat{X}'_{n-1}$ a spracovávanej (prítomnej) zašumenej vzorky X_n.

$$\boxed{\hat{X}'_n = h_n \hat{X}'_{n-1} + g_n X_n = c\hat{X}'_{n-1} + g_n\left(X_n - c\hat{X}'_{n-1}\right)}$$

$h_n = c(1 - g_n)$

reprezentuje predikciu vzorky užitočného signálu pomocou predchádzajúcich vzoriek signálu.

reprezentuje *korekciu*, ktorú vypočítame súčinom koeficientu g_n s rozdielom spracovávanej zašumenej vzorky X_n a predikčnej vzorky X_n.

V procese optimalizácie rekurzívnej lineárnej estimácie ***minimalizujeme strednú kvadratickú estimačnú chybu***

$$\sigma_e^2(n) = E\left[\left(X'_n - \hat{X}'_n\right)^2\right]$$

Výsledkom tohto sú časovo premenné koeficienty h_n a g_n.

Ďakujem za pozornosť!

Nabudúce:

- Ďalšie zaujímavé poznatky získate na povinne voliteľnom predmete:

Číslicové spracovanie obrazov

(2. r. Ing. – ZS)