Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 8

- **Aktualizácia**
- Úvod do waveletovej transformácie (WT)
- Diskrétna WT (DWT)

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Aktualizácia

Aké frekvenčné rozlíšenie získame pomocou FFT ak signál v časovej oblasti mal N vzoriek?

Aktualizácia

Akú maximálnu frekvenciu je možné odčítať z DFT spektra?

Aktualizácia

Aký je rozdiel medzi FT a DFT spektrom diskrétneho signálu?

Aktualizácia

Prečo je DFT spektrum diskrétne?

Aktualizácia

Čo je to FFT a akú má výhodu?

Aktualizácia

Čo je to spektrogram?

Aktualizácia

Aký je rozdiel medzi FFT a STFT?

Aktualizácia

Čo je to Gáborová transformácia?

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 8

- Aktualizácia
- **Úvod do waveletovej transformácie (WT)**
- Diskrétna WT (DWT)

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Úvod do waveletovej transformáciev - wavelety

Wavelety sú funkcie, ktoré vyhovujú určitým matematickým podmienkam

- *Sú časovo obmedzené*
- *Podmienka ortogonality*
- ***Podmienka prípustnosti* - Hovoríme že integrovateľná funkcia $\psi(t)$ je waveletová funkcia (nazýva sa aj základná alebo materská waveletová funkcia) ak platí:**

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\breve{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \text{ kde } \breve{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$$

Tiež platí, že: $\breve{\psi}(0) = 0$

A tiež $\|\psi(t)\| = 1$

- Používajú sa na reprezentáciu dát alebo iných funkcií
- Sú schopné prispôsobiť sa signálom lepšie ako nekonečné harmonické funkcie
- Pre wavelet musí platiť, že a v prípade, ak je potrebné wavelet výškovo a šírkovo dilatovať alebo meniť časový posun, tak sa takýto wavelet z materského waveletu definuje podľa:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Úvod do waveletovej transformáciev - wavelety

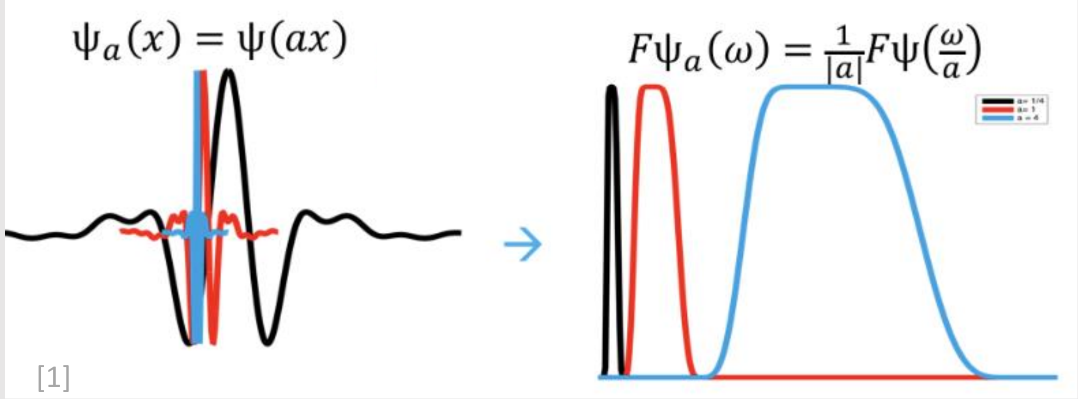
Wavelety sú funkcie, ktoré vyhovujú určitým matematickým podmienkam

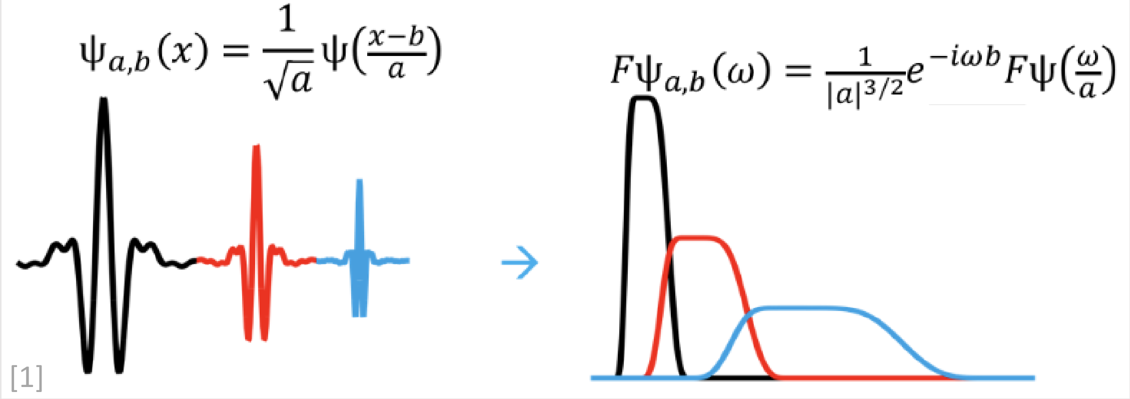
- Pre wavelet musí platiť, že a v prípade, ak je potrebné wavelet výškovo a šírkovo dilatovať alebo meniť časový posun, tak sa takýto wavelet z materského waveletu definuje podľa:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- Výraz $\frac{1}{\sqrt{a}}$ zabezpečuje normovanie tak aby platilo, že:

$$\|\psi(t)\| = \|\psi_{a,b}(t)\| = 1$$





[1] Penrot S. "Wavelet analysis" https://letscan.net/wave-analysis

Úvod do waveletovej transformáciev - SWT

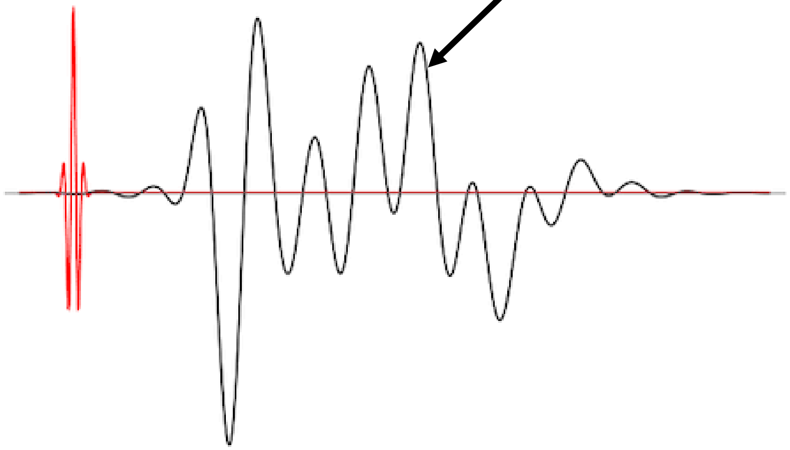
Spojitá waveletová transformácia je definovaná podľa vzťahu:

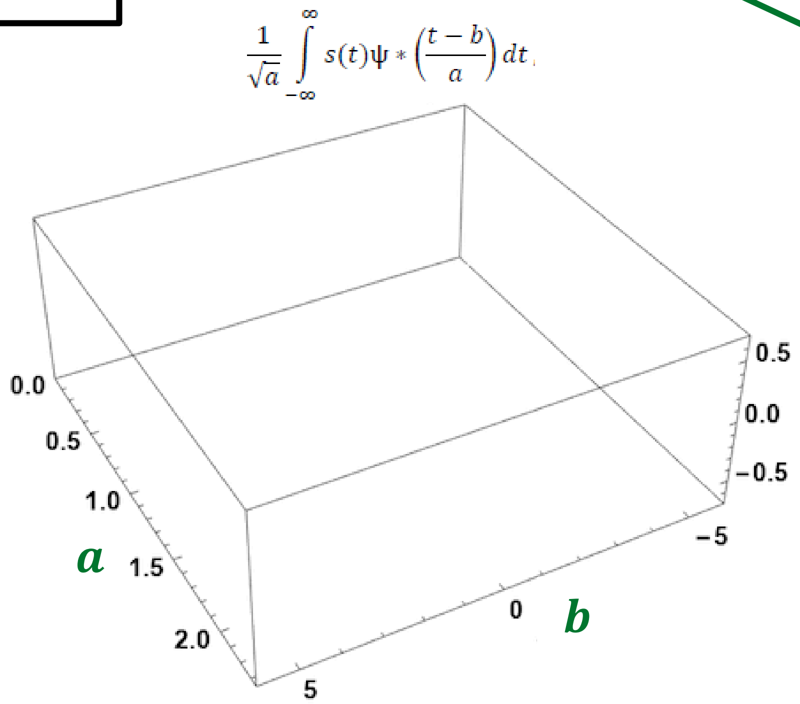
* - komplexne združená funkcia (wavelet je vo všeobecnosti komplexná funkcia)

$$\mathrm{SWT}\{s(t), a, b\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \qquad a > 0, \qquad b \in R$$

Analyzovaný signál

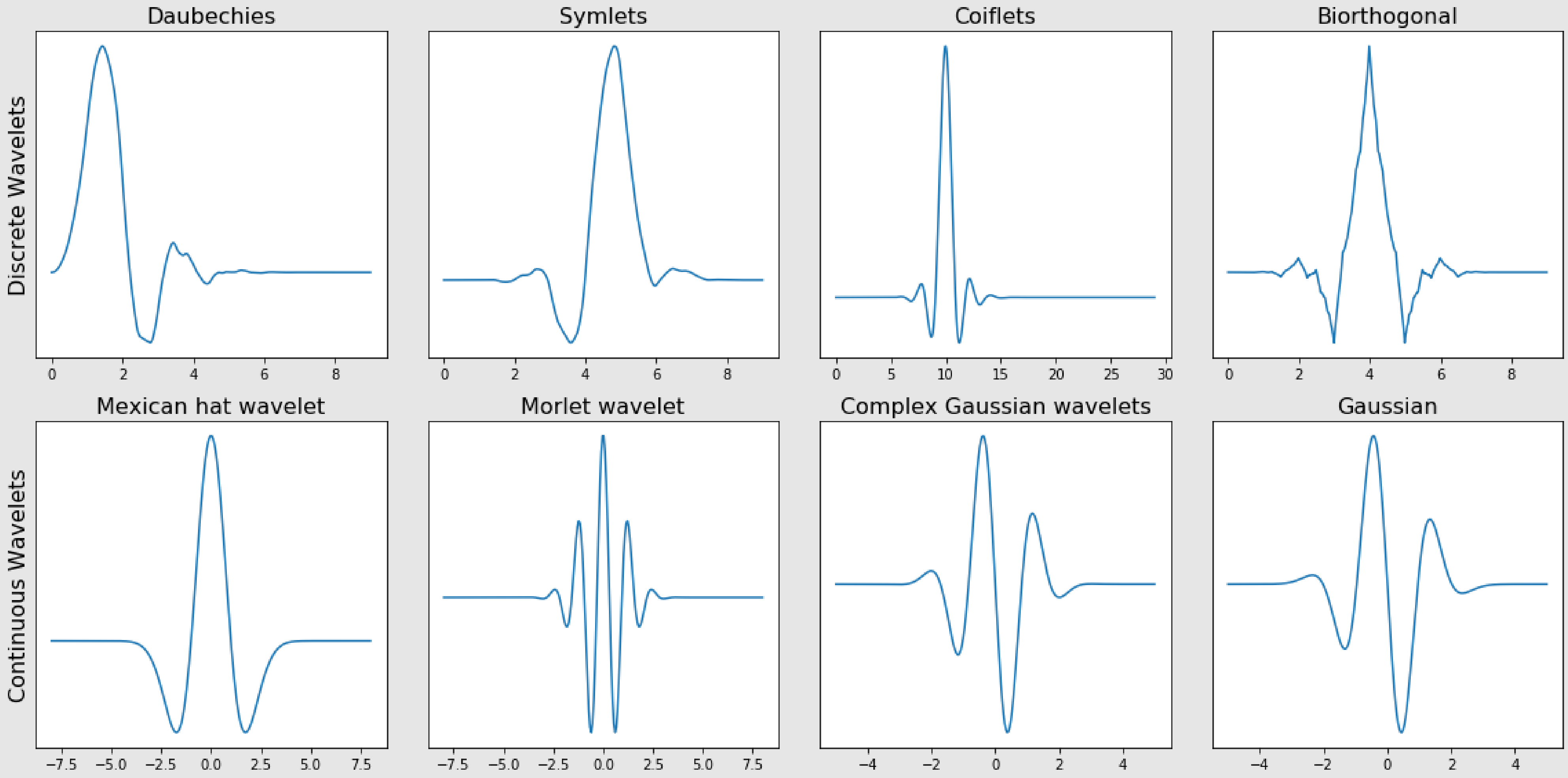
Wavelet posunutý do okamihu b a škálovaný (dilatovaný) v čase i amplitúde faktorom a.





Úvod do waveletovej transformáciev - wavelety

- Existuje veľké množstvo waveletov:
  - Db (rodina waveletov), Morletov, Haarov, Mexický klobúk, Coifletové, Gaussové a iné...



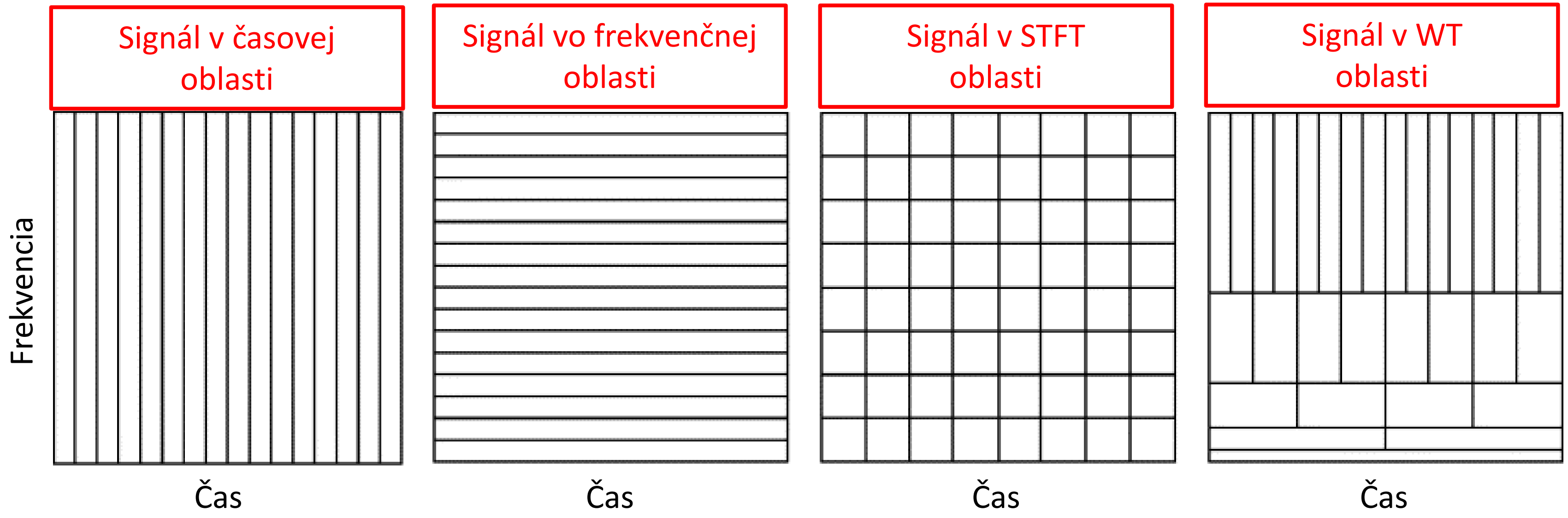
[1]

[1] Enamamu, T.; Otebolaku, A.; Marchang, J.; Dany, J. Continuous m-Health Data Authentication Using Wavelet Decomposition for Feature Extraction. Sensors 2020

Úvod do waveletovej transformáciev - WT

Waveletová transformácia (WT - **Wavelet transform**, v **ČR literatúre Vlnková transformace**), je metóda používaná na časovo frekvenčnú analýzu signálov.

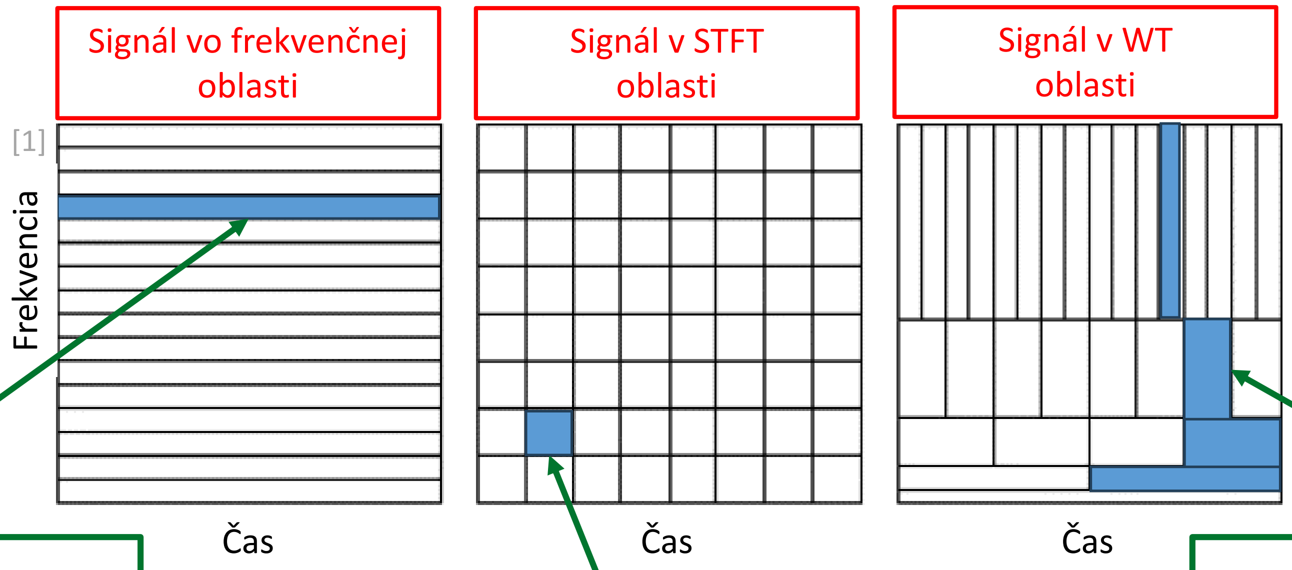
- WT je pomenovaná podľa waveletov, čo sú časové funkcie, ktoré sú vhodné najmä pre analýzu veľmi premenlivých signálov.
- **Umožňuje zobrazenie signálov v časovo mierkovej oblasti**.
- Výhodou oproti STFT je najmä to, že **pri rôznych frekvenciách je možné získať rôzne rozlíšenie**, keďže pri STFT je rozlíšenie pevné pre celé spektrum.
- WT sa využíva napríklad pri kompresii audia, obrazov alebo videa, pri rozoznávaní hlasu



[1]

[1] Kehtarnavaz, Nasser. "Digital Signal Processing System Design: LabVIEW-Based Hybrid." (2008).

Úvod do waveletovej transformáciev - WT



Pri využití FT (DFT) vieme presne rozlíšiť jednotlivé frekvencie obsiahnuté v signáli. Nedokážeme určiť v akých časových okamihoch sa vyskytli.

Pri využití STFT vieme rozlíšiť jednotlivé frekvencie obsiahnuté v signáli. Zároveň dokážeme určiť aj čas kedy sa tieto frekvenčné zložky vyskytovali. Keďže oknová je konštantnej dĺžky je rozlíšenie v čase aj frekvencii rovnaké (štvorčeky).

Pri využití WT vieme jednotlivé frekvencie obsiahnuté v signáli a tiež aj čas kedy sa vyskytovali. Zároveň, keďže wavelet je možné škálovať v čase, je možné získať premenlivé rozlíšenie.

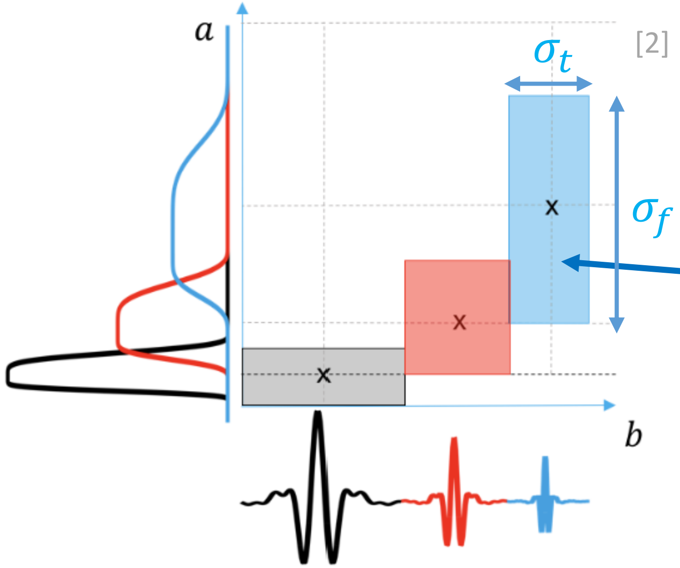
[1] Kehtarnavaz, Nasser. "Digital Signal Processing System Design: LabVIEW-Based Hybrid." (2008).

Úvod do waveletovej transformáciev - WT

- Spektrogram pre WT môže byť v princípe spojitý pretože a a b je možné meniť spojite. Pre rozlíšenie v čase a frekvencii platí Heisenbergov princíp neurčitosti – čím presnejšie rozlišujeme čas tým vyššiu neistotu máme vo frekvencii a naopak.

$$\sigma_f \sigma_t = \frac{1}{2}$$

σ_f je neistota vo frekvenčnej oblasti a σ_t je neistota v čase

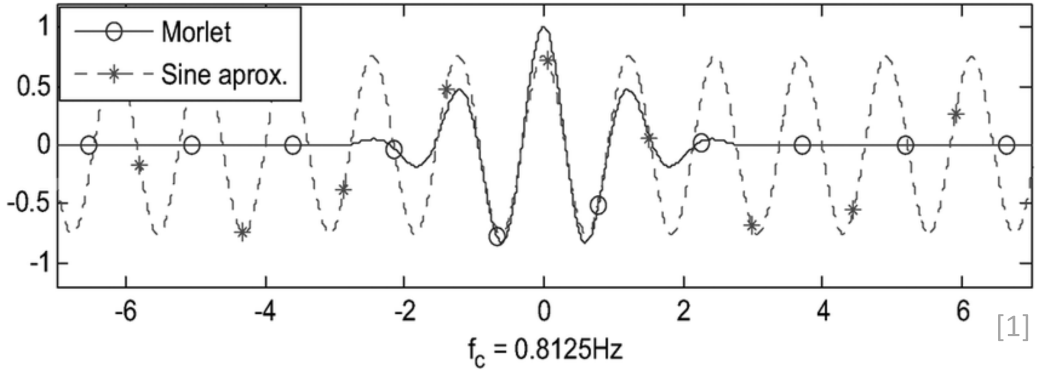


Heisenbergova oblasť neistoty.

- Nakoľko pri časovo-frekvenčnej analýze chceme poznať frekvenciu (nie škálu, ktorá je definovaná ako a) je potrebné vykonať prevod podľa:

$$\frac{f_c f_s}{a} = f_a$$

f_c je prostredná frekvencia waveletu, ktorá vo všeobecnosti popistuje jeho chovanie v spektrálnej oblasti. Je získaná tak, že daný wavelet sa aproximuje harmonickou funkciou s istou frekvenciou. f_s je vzorkovacia frekvencia a a je škála. f_a je ekvivalentná frekvencia pre danú škálu.



[1] E. Gomez-Luna, G. Aponte Mayor and J. Pleite Guerra,"Application of Wavelet Transform to Obtain the Frequency Response of a Transformer From Transient Signals Part II: Practical Assessment and Validation,
[2] Penrot S. "Wavelet analysis" https://letscan.net/wave-analysis

Úvod do waveletovej transformáciev - SWT

Spojitá Waveletová Transformácia (SWT)

- Je daná ako konvolúcia bázovej funkcie a signálu
- Pri WT je použitá ako bázová funkcia wavelet
- SWT spektrogram obsahuje informáciu o čase aj frekvencii
- **Časová informácia je získaná posunom waveletu** v čase
- **Informácia o frekvencii je získaná moduláciou waveletu (zmena šírky a výšky)**.
- Výsledné spektrum obsahuje presnejší popis signálu ako spektrum STFT.

Spojitá waveletová transformácia je definovaná podľa vzťahu:

- SWT vo svojej podstate predstavuje konvolúciu medzi signálom a spojite sa posúvajúcim a expandujúcim waveletom.

Analyzovaný signál

$$\mathrm{SWT}\{s(t), a, b\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \qquad a > 0, \qquad b \in R$$

Wavelet posunutý do okamihu b a škálovaný (dilatovaný) v čase i amplitúde faktorom a.

* - komplexne združená funkcia (wavelet je vo všeobecnosti komplexná funkcia)

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 8

- Aktualizácia
- Úvod do waveletovej transformácie (WT)
- **Diskrétna WT (DWT)**

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

Diskrétna waveletová transformácia vychádza zo spojitej tak, že parametre a a b sú vzorkované:

Diskrétna waveletová transformácia vychádza zo spojitej, že parametre a a b sú vzorkované:
- Diskretizácia a a b vedie k získaniu „diskrétnych waveletov"
- Obvykle je zmena týchto parametrom násobkom dvoch (dyadická DWT, ktorá sa vyznačuje dyadickým vzorkovaním časovej i frekvenčnej osi.)
- Potom pre parametre a a b platí:

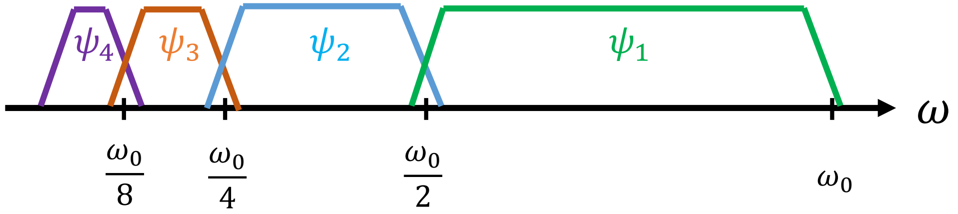
$*$

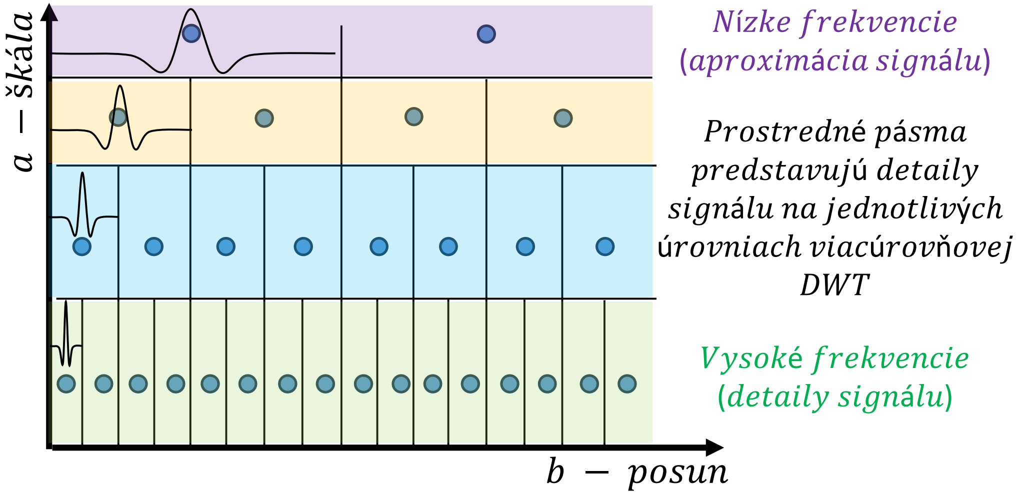
* - komplexne združená funkcia (wavelet je vo všeobecnosti komplexná funkcia)

- Diskretizácia a a b vedie k získaniu „diskrétnych waveletov"
- Obvykle je zmena týchto parametrom násobkom dvoch (dyadická DWT, ktorá sa vyznačuje dyadickým vzorkovaním časovej i frekvenčnej osi.)
- Potom pre parametre a a b platí:

$$a = 2^m, b = n2^m$$
$$m = 1, 2, \dots \infty$$
$$n = -\infty \dots -1, 0, 1, 2, \dots \infty$$

- Škálovací resp. mierkový faktor 2 v čase znamená, že pri spektrách waveletov bude frekvenčná škála rozdelená na oktávy (zdvojovanie frekvenčných intervalov)





Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

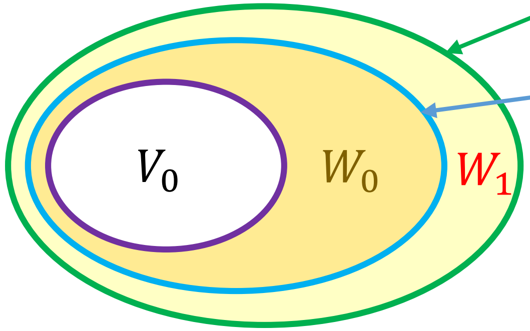
Cieľom pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* je rozložiť ľubovoľný signál $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ do systému hierarchických subpriestorov, ktoré by **charakterizovali rôzne rýchle zmeny v signáli**.
Aby sme to dosiahli, definujeme viacúrovňové rozlíšenie ako postupnosť uzavretých subpriestorov V_m priestoru $L^2(\mathcal{R})$, pre ktoré platí:

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_\infty$$

- Subpriestory V_m sú schopné charakterizovať rôzne, ale iba do istej úrovne rýchle zmeny v signáli. Majú teda aproximačný charakter (ich vlastnosti: úplnosť, invariantnosť voči zmene mierky a posunu v čase, existencia bázy ortogonálneho doplnku W_m (tj. komplementárny subpriestor)).

- **prechod medzi subpriestormi** je popísaný vlastnosťou dvojnásobnej mierky: $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & V_{-1} \arrow[r] & V_0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & \cdots \\
& W_{-1} \arrow[ur] & W_0 \arrow[ur] & W_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

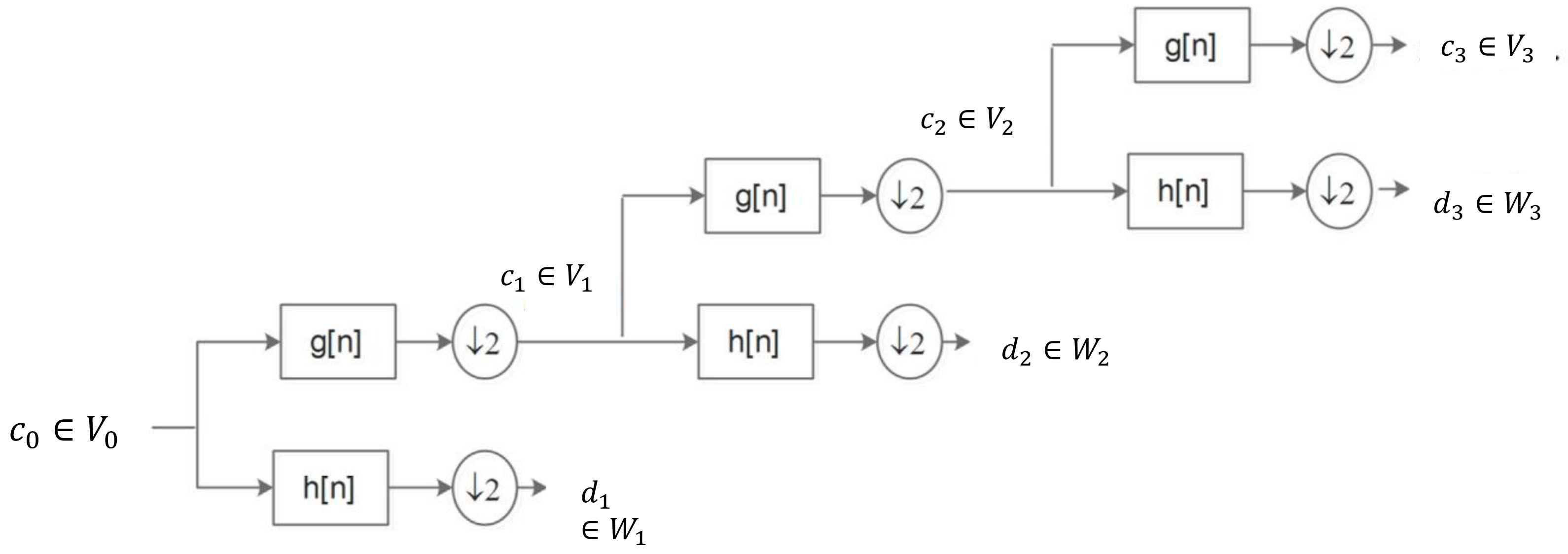


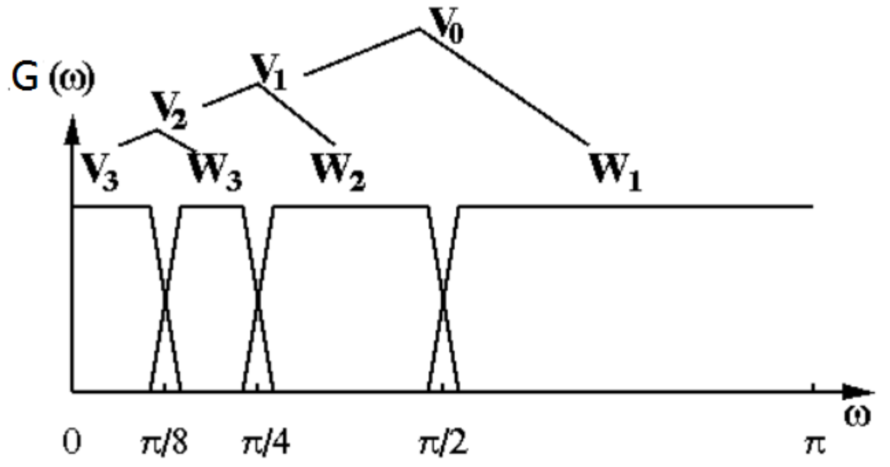
$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

$L^2(\mathcal{R})$ priestor
Vektormi f v priestore $L^2(\mathcal{R})$ sú funkcie $f(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$, ktoré sú po kvadrátoch integrovateľné, teda $\|f\| < \infty \rightarrow \int f^2(t)dt < \infty$

Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)





Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

Pri DWT sa využívajú dve funkcie:

- **Mierková funkcia $\boldsymbol{\varphi(t)}$,** ktorá spolu s jej posunutými verziami tvorí ortonormálnu bázu subpriestorov V_m. Funkcie tejto sú **aproximačné funkcie**

$$\left\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\varphi\left(2^{-m}t - n\right),\ n \in \mathcal{Z}\right\}$$

- **Waveletová funkcia** $\psi(t)$ je bázou komplementárnych subpriestorov W_m . Funkcie tejto bázy sú **waveletové funkcie**. Ktoré vyjadrujú detaily na danej úrovni rozlíšenia.

$$\left\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi\left(2^{-m}t - n\right),\ n \in \mathcal{Z}\right\}$$

- Platí, že: $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

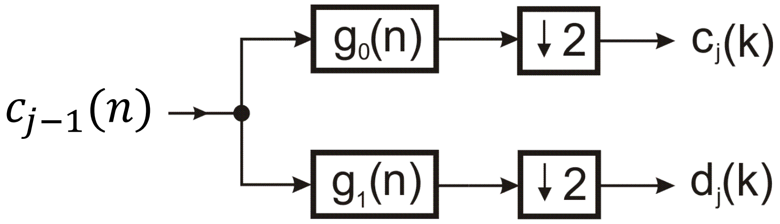
- **DMW sa z pravidla vykonáva pomocou MKDS**
- Signál $f(t)$ môže byť vyjadrený jednoznačne ako **suma jeho projekcií do subpriestorov** V_j a W_j s použitím príslušných báz pomocou dvojkanálovej diskrétnej sústavy analýzy takto:

$$\boxed{f(t) = \sum_k c_j(k)\varphi_{j,k}(t) + \sum_k d_j(k)\psi_{j,k}(t)}$$

- pričom rozkladové koeficienty sú dané ako skalárne súčiny signálu a mierkovej resp. waveletovej funkcie danej úrovne:

$$c_j(k) = \langle f(t), \phi_{j,k} \rangle \qquad d_j(k) = \langle f(t),\ \Psi_{j,k} \rangle$$

- Projekcie sú prakticky vykonané vypočítaním neznámych koeficientov j-tej úrovne $[c_j(k)$ a $d_j(k)]$ zo známych koeficientov vyššej úrovne takto:



$$c_j(k) = g_0(n) * c_{j-1}(n)\Big|_{2k}$$

Impulzné odpovede DP a HP filtrov 2KDS

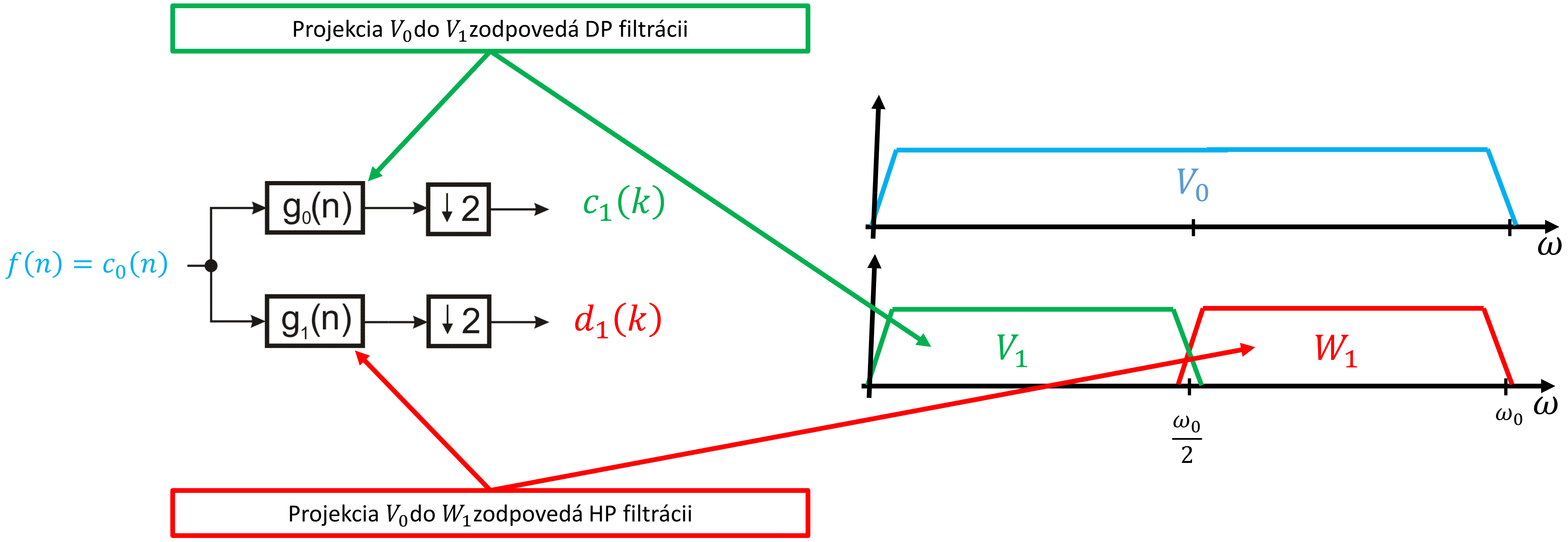
Konvolúcia

Decimácia (D=2)

$$d_j(k) = g_1(n) * c_{j-1}(n)\Big|_{2k}$$

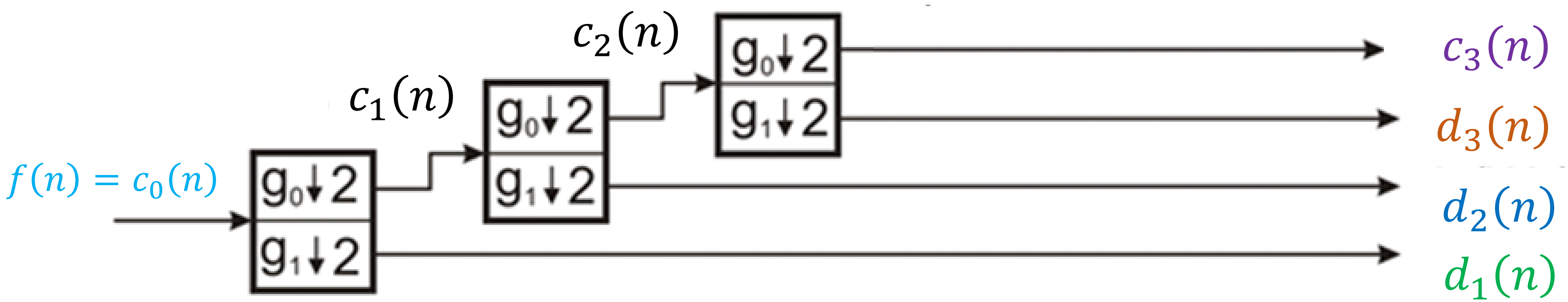
Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

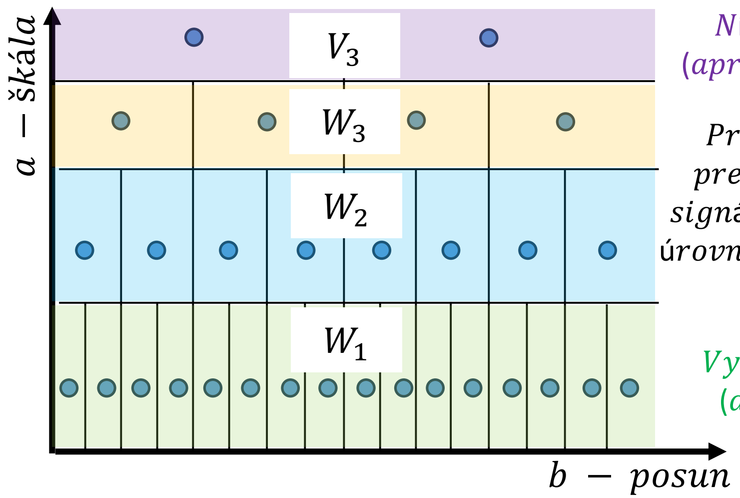
- **DMW sa z pravidla vykonáva pomocou MKDS**



Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

- **DMW sa z pravidla vykonáva pomocou MKDS**
- Viacúrovňovú DWD je možné získať pomocou stromovej štruktúry zapájania 2KDS to zodpovedá oktávovej diskrétnej sústave analýzy.

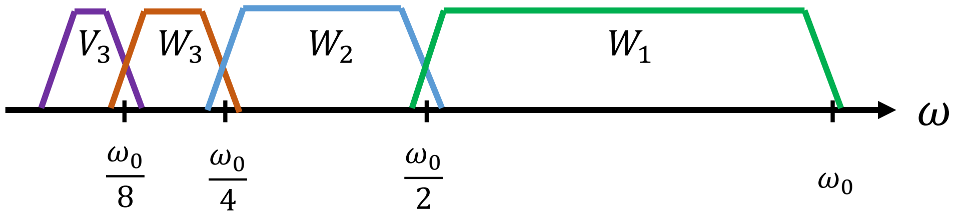




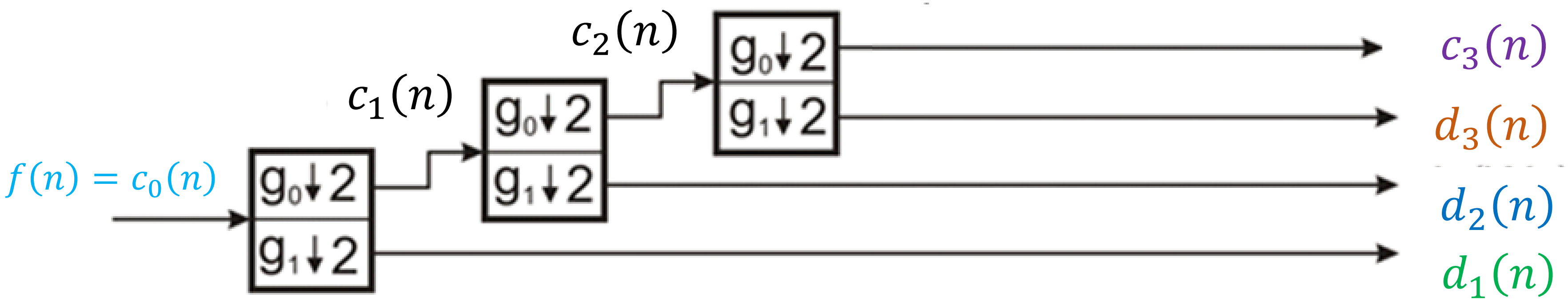
Nízke frekvencie (aproximácia signálu)

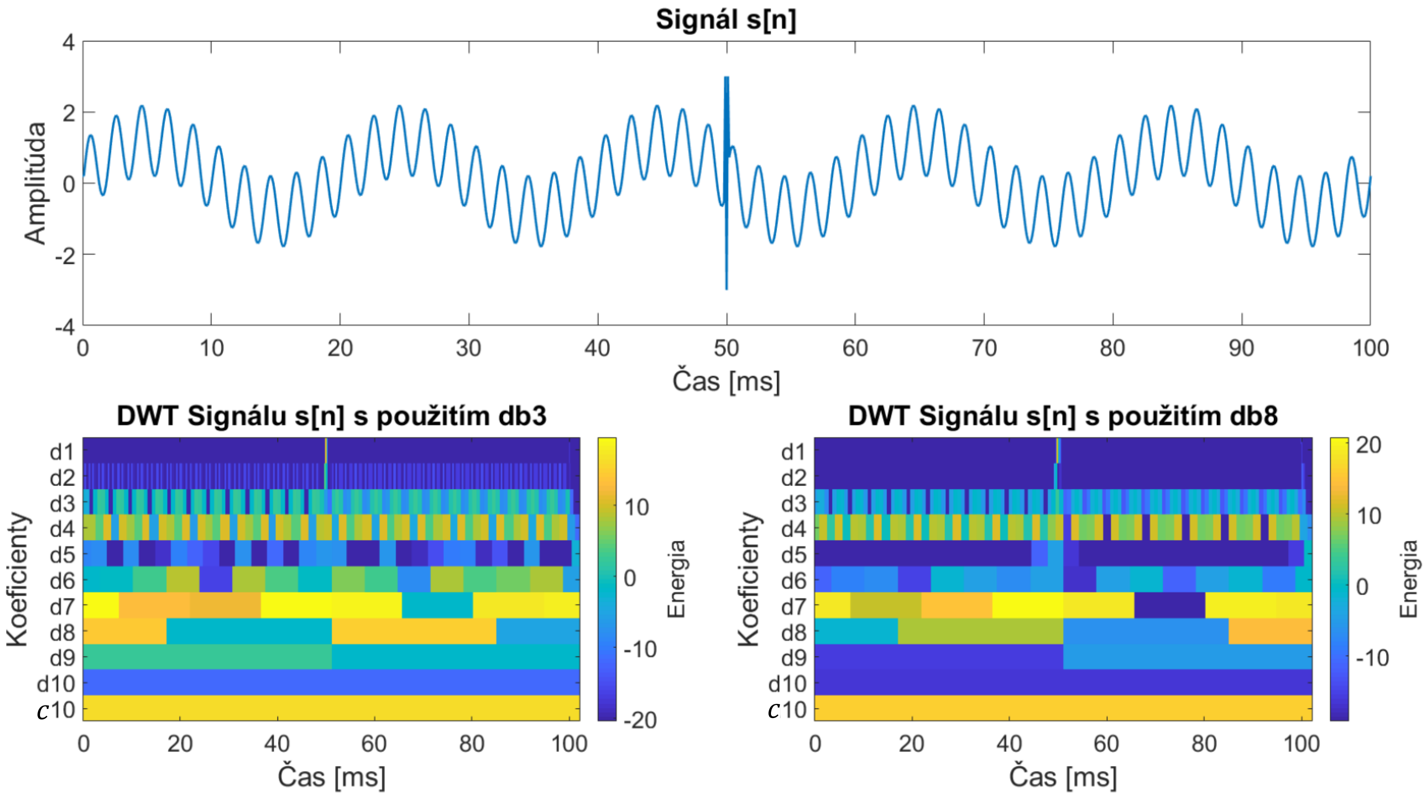
Prostredné pásma predstavujú detaily signálu na jednotlivých úrovniach viacúrovňovej DWT

Vysoké frekvencie (detaily signálu)



Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

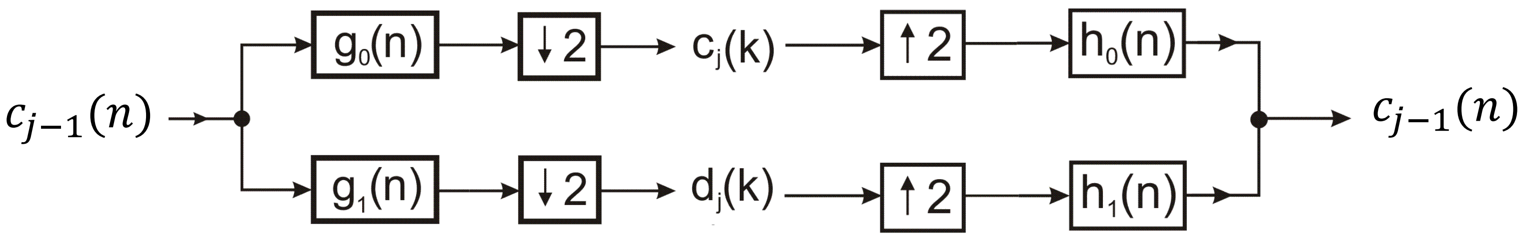




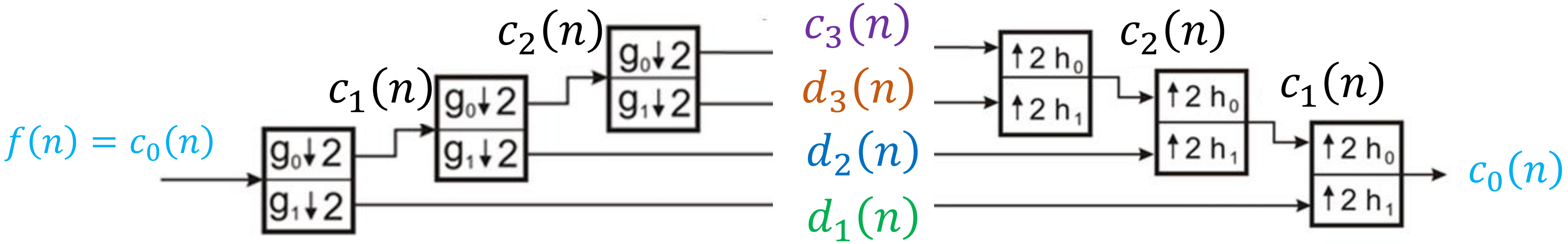
[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

- **Na strane syntézy sa zo známych rozkladových koeficientov pomocou 2KDS získa pôvodný signál**



- Analogicky je možné vykonať syntézu (rekonštrukciu) aj pre viacúrovňovú DWT



- Diskrétna realizácia WT je úzko spojená s číslicovou filtráciou prostredníctvom bánk filtrov so stromovou štruktúrou, kde waveletom filtra môže byť impulzná charakteristika vhodného číslicového filtra FIR typu.

- Najpoužívanejšia praktická realizácia DWT spočíva v štruktúre páru kvadratúrnych zrkadlových filtrov (QMF) tvorených dolným priepustom DP (scaling filter) a horným priepustom HP (wavelet filter), ktoré majú komplementárne priepustné pásma.

Diskrétna Waveletová Transformácia (DWT)

- V spojitosti s bankami číslicových filtrov s dokonalou rekonštrukciou wavelety definujú impulzné charakteristiky rekonštrukčných filtrov pomocou waveletovej filtrácie prispôsobením jednotlivých časti systému úrovni užitočného signálu a jeho rozlíšeniu od šumu v ľubovoľnom úseku dosiahnuť významného potlačenia širokopásmového šumu.

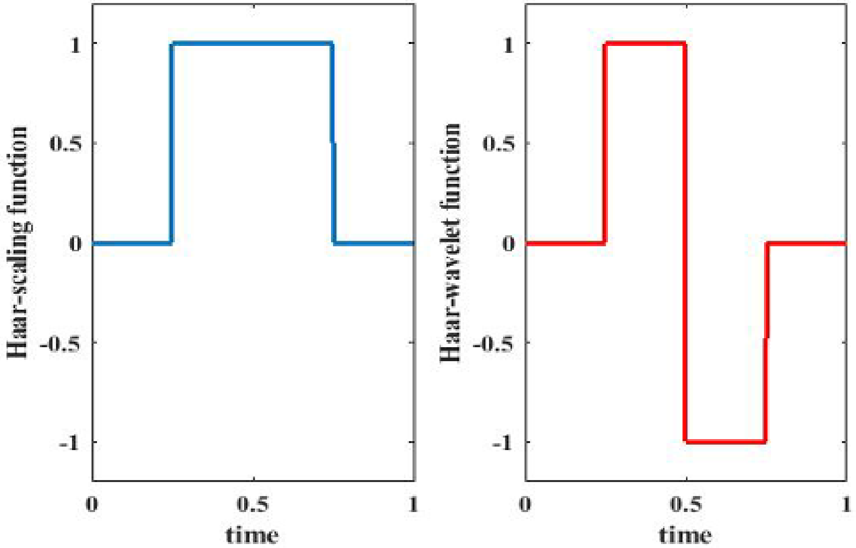
- DWT môžeme chápať ako špeciálne vzorkovanú spojitú WT, ktorú je možné počítať rýchlym algoritmom (tvoreným filtráciou FIR filtrami a podvzorkovaním (decimáciou)).

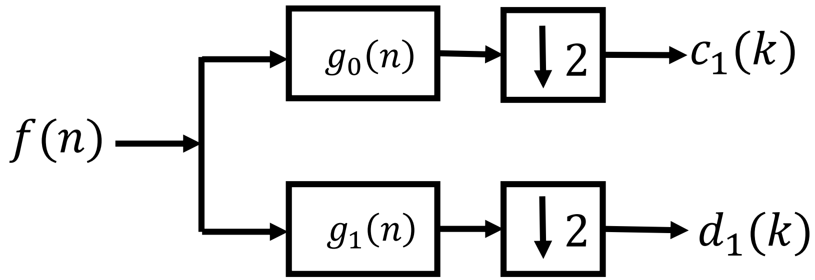
Výhody DWT

- Pri waveletovej analýze **prispieva každý koeficient k celku iba lokálne**, preto WT, na rozdiel od klasických filtračných metód, umožňuje **vytvárať lokálne adaptívne filtre**.
- Ďalšou veľkou výhodou filtrácie s využitím DWT je, že **nevytvára skreslenie pri strmých skokoch vstupného signálu**, ako tomu je pri filtrácii klasickými číslicovými filtrami.

DWT – Praktická ukažka (Haarov wavelet)

- Haarov wavelet (tiež označovaný ako Daubechiovej wavelet č. 1 – db1) je najjednoduchším waveletom vôbec.
- DWT je vždy popísaná pomocou škálovacej a waveletovej funkcie. Pre Haarov wavelet sú nasledovné:

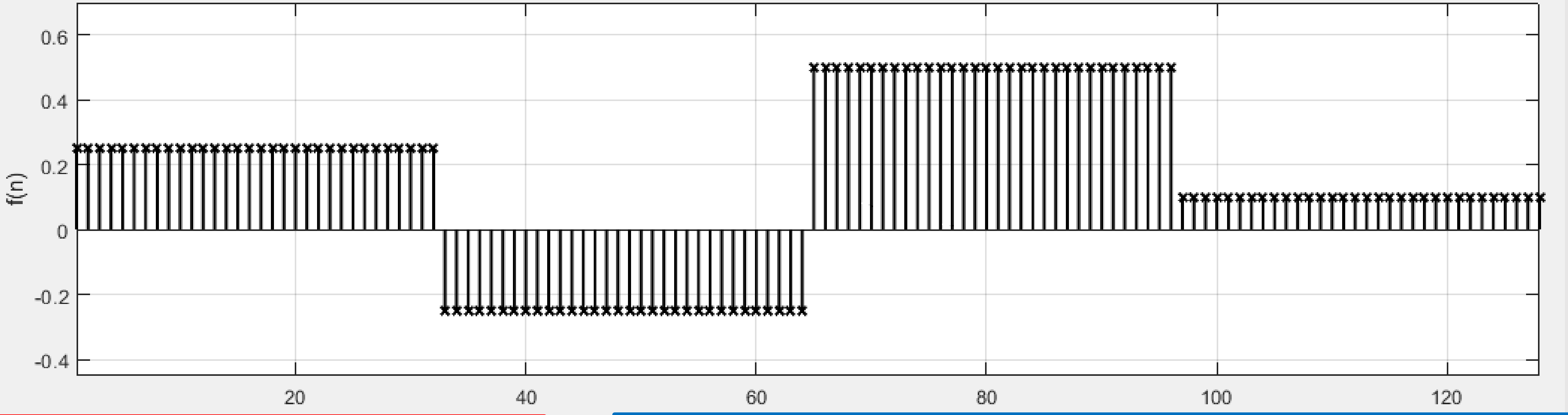




- Analýze DWT s Haarovým waveletom zodpovedá zapojenie QMF s nasledovnými impulznými odpoveďami:

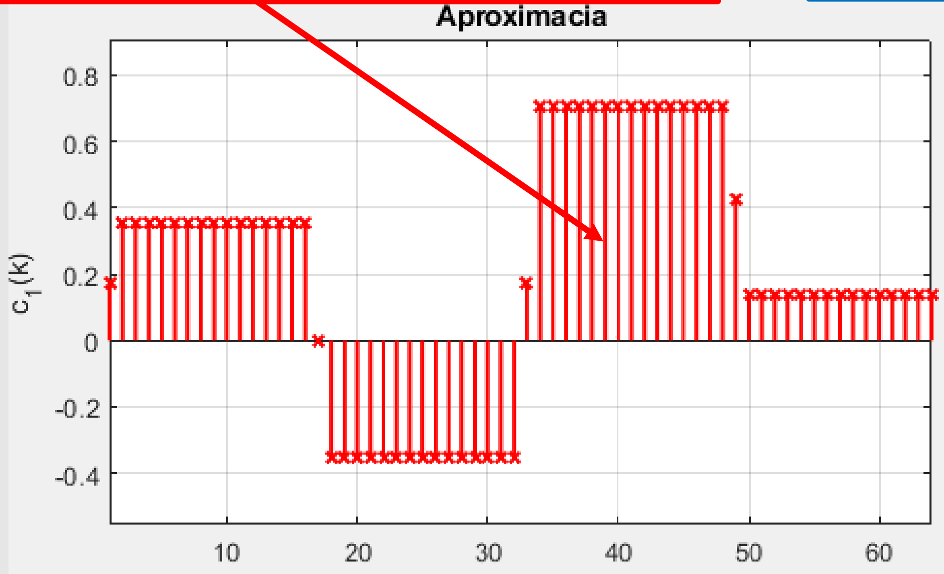
$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

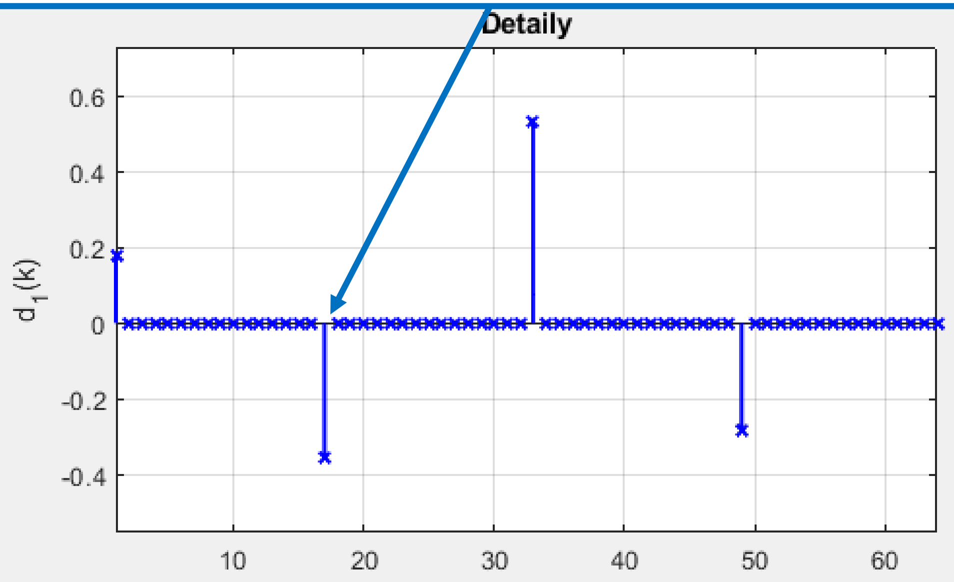
DWT – Praktická ukažka (Haarov wavelet)



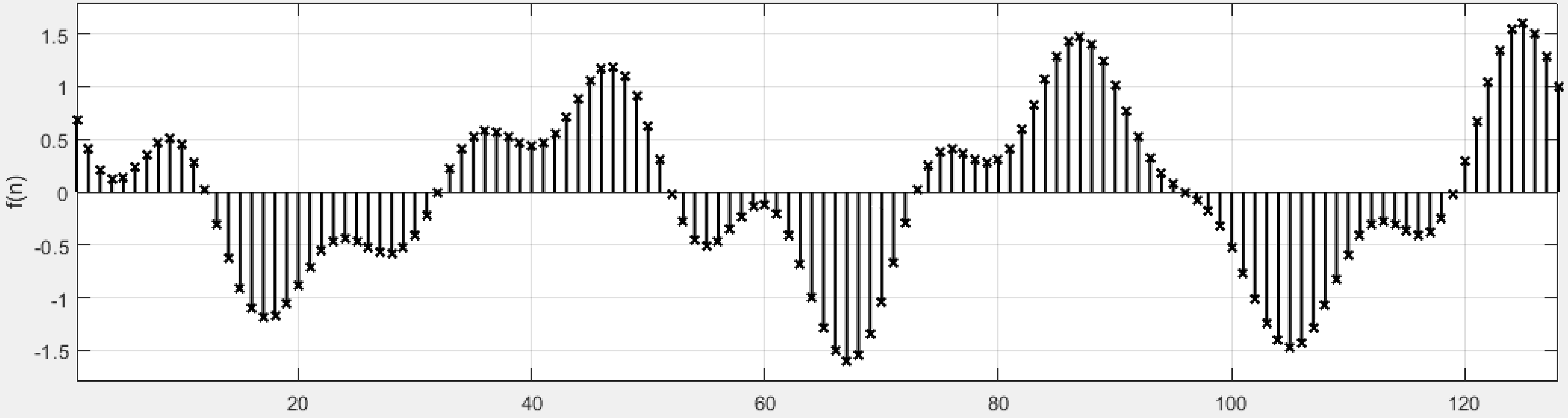
Aproximačná časť „sa podobá“ pôvodnému signálu. Predstavuje DP časť.

Detailová časť predstavuje zmeny v signáli – detaily signálu. Predstavuje HP časť. Vidíme, že detailová časť obsahuje iba 4 koeficienty – výrazné potlačenie redundancie, ktoré je možné využiť pri kompresii objemu dát



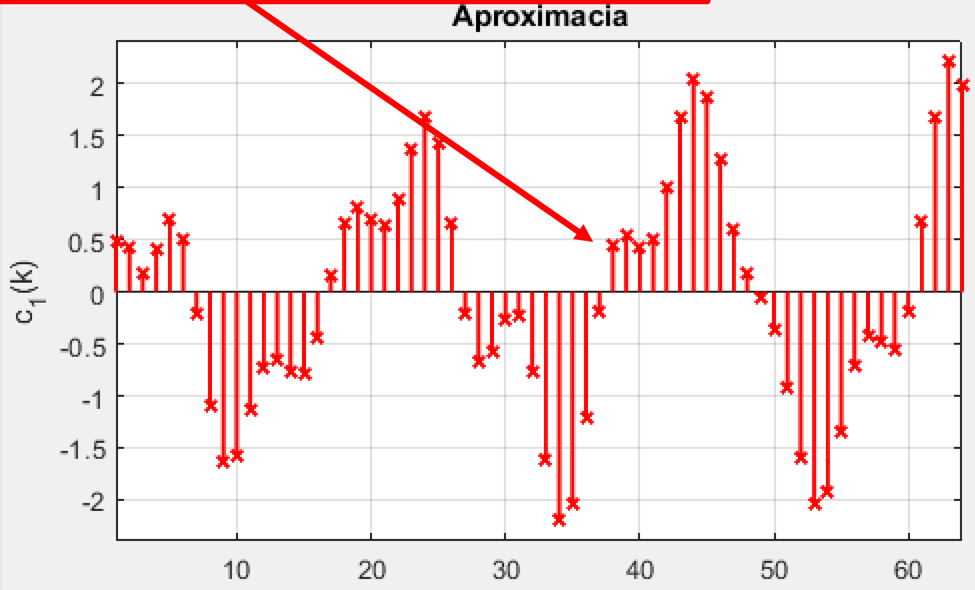


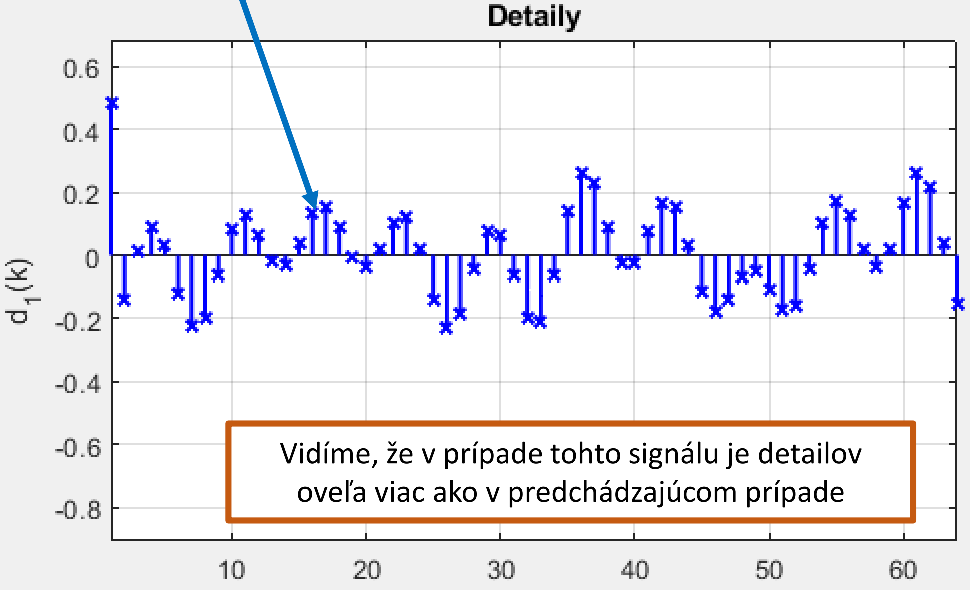
DWT – Praktická ukažka (Haarov wavelet)



Aproximačná časť „sa podobá“ pôvodnému signálu. Predstavuje DP časť.

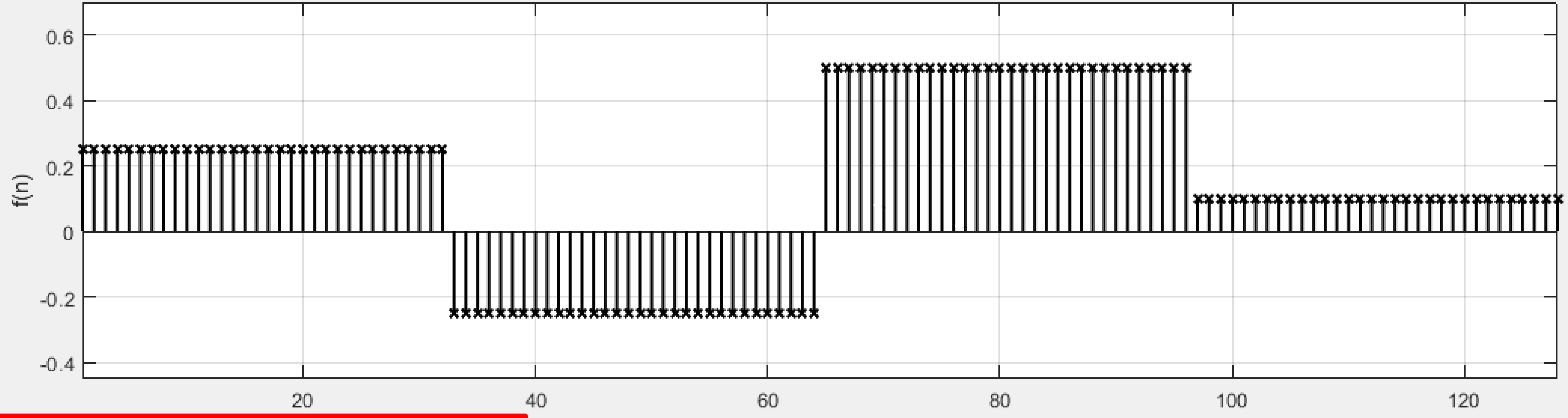
Detailová časť predstavuje zmeny v signáli – detaily signálu. Predstavuje HP časť.



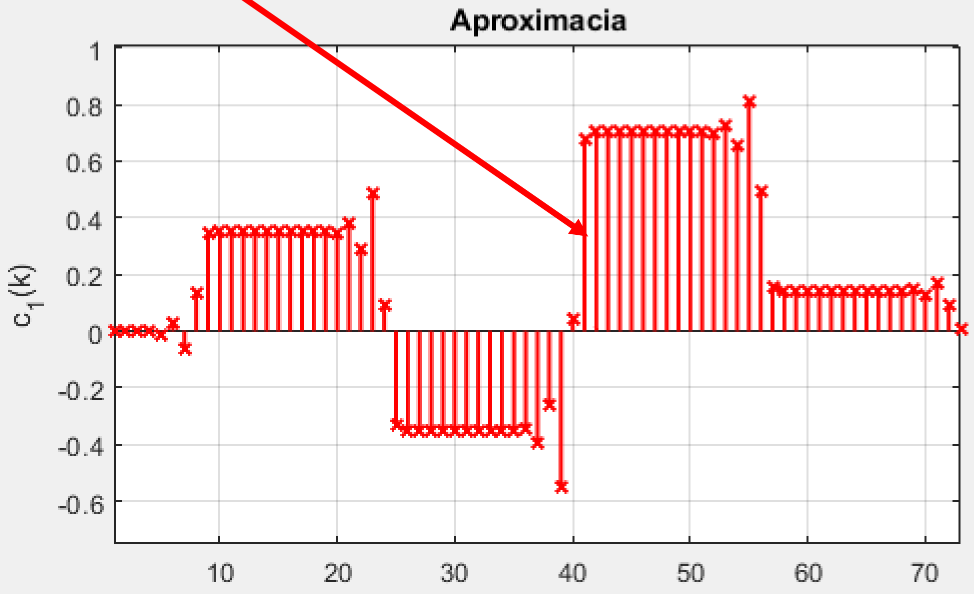


Vidíme, že v prípade tohto signálu je detailov oveľa viac ako v predchádzajúcom prípade

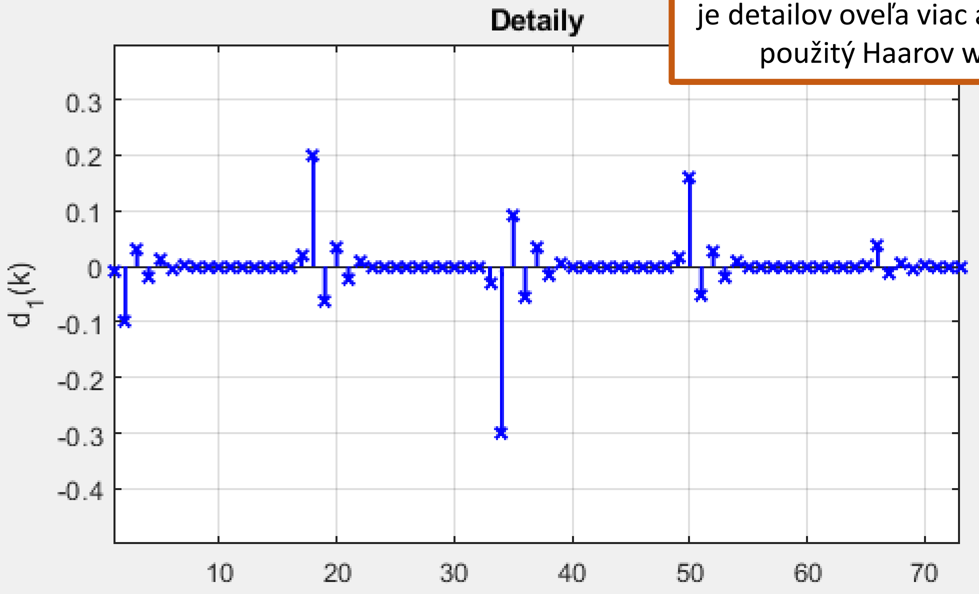
DWT – Praktická ukažka (db9)



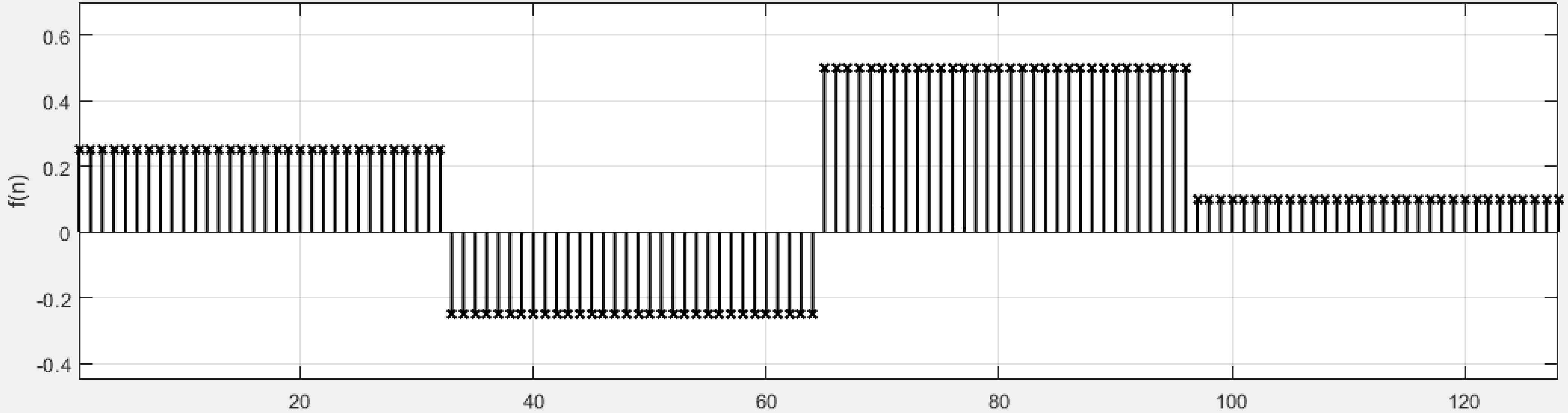
Aproximačná časť „sa podobá“ pôvodnému signálu. Predstavuje DP časť.



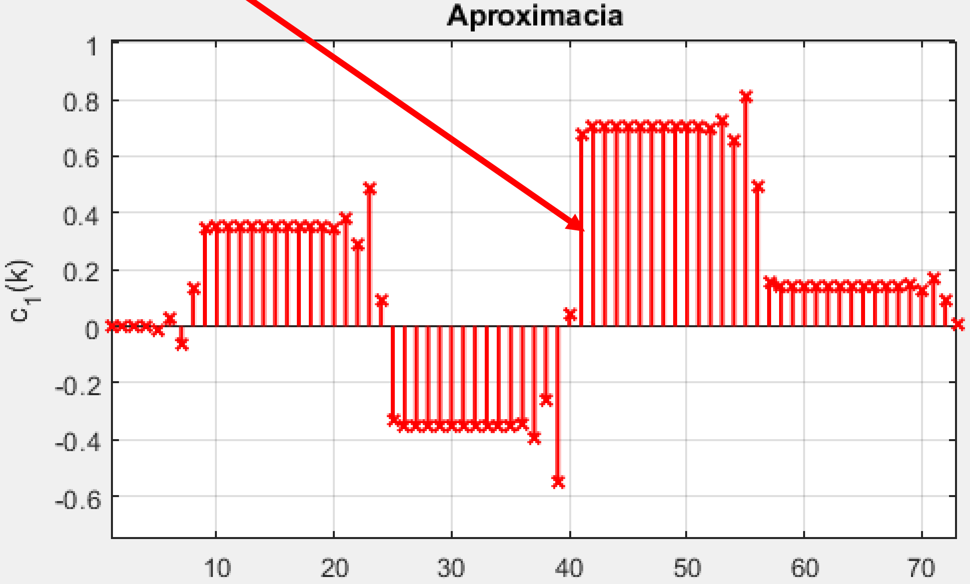
Vidíme, že v prípade tohto signálu je detailov oveľa viac ako keď bol použitý Haarov wavelet



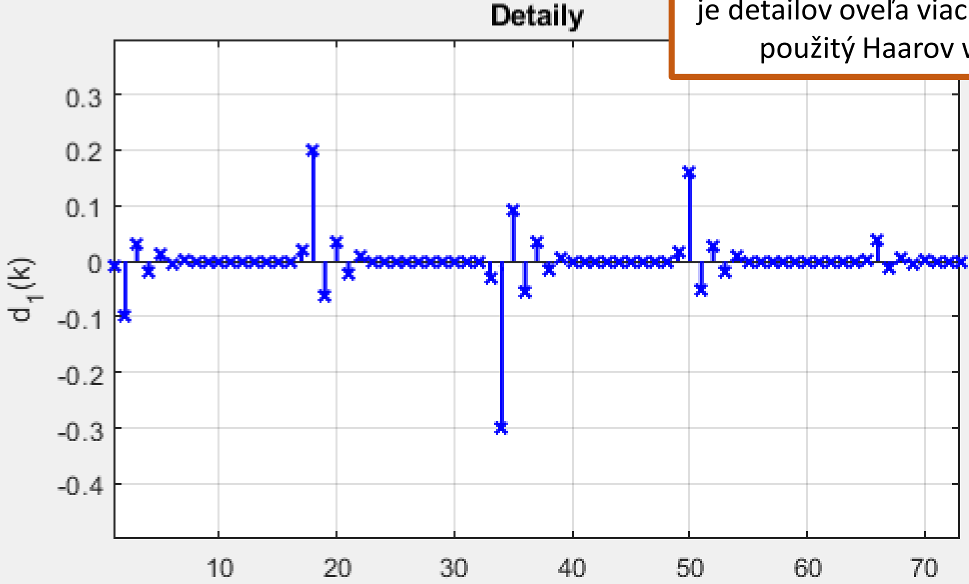
DWT – Praktická ukažka (db9)



Aproximačná časť „sa podobá“ pôvodnému signálu. Predstavuje DP časť.



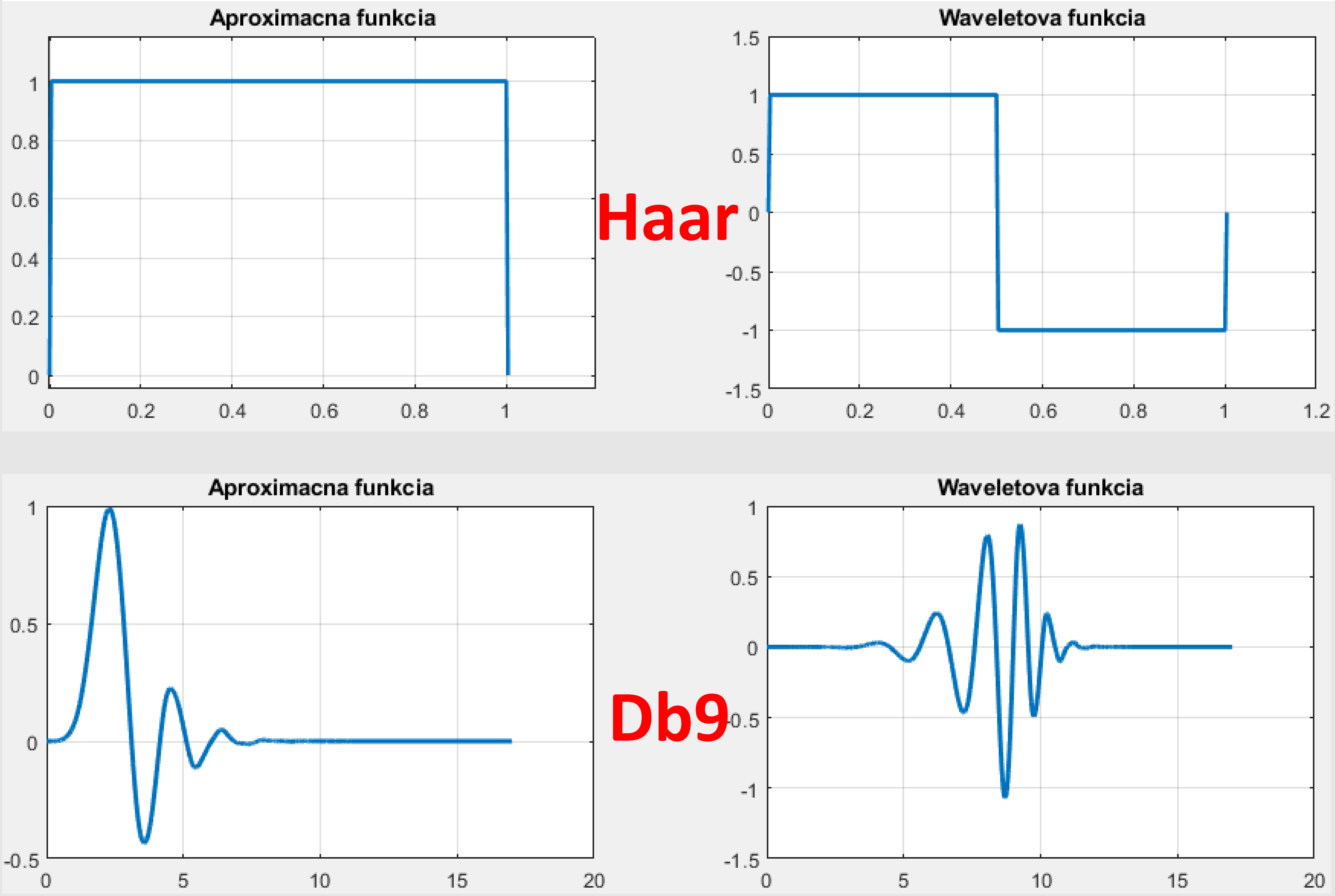
Vidíme, že v prípade tohto signálu je detailov oveľa viac ako keď bol použitý Haarov wavelet



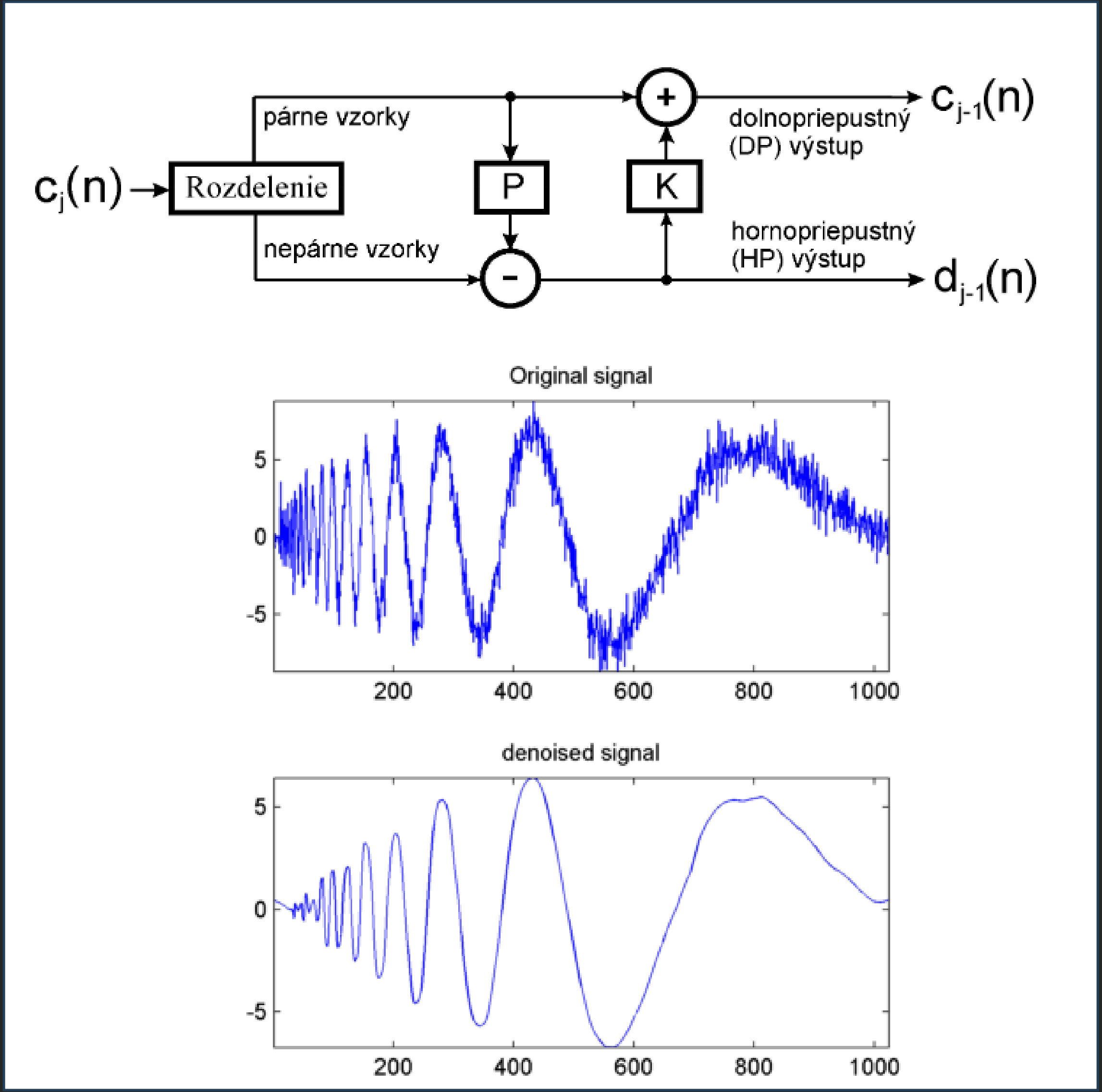
DWT – Praktická ukažka (Haar vs db9)

- Vo všeobecnosti platí, že voľba waveletu je závislá od toho aký signál je potrebné analyzovať.

- Z príkladov je zrejmé, že pre účely kompresie je vhodnejší ten wavelet, ktorý vedie k rozkladu s nižším počtom nenulových koeficientov



Ďakujem za pozornosť!



Nabudúce:

- Lifting implementácia DWT
- 2D DWT
- Niektoré aplikácie DWT