Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 7

- **Aktualizácia**
- Diskrétna Fourierová transformácia a spektrálna analýza diskrétnych signálov
- Časovo-frekvenčná analýza signálov

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Aktualizácia

Aké sú hlavné výhody MKDS?

Aktualizácia

Kedy hovoríme o maximálne decimovanom systéme?

Aktualizácia

Aké skreslenia je potrebné eliminovať pri návrhu MKDS (sú 3)?

Aktualizácia

Aký je rozdiel medzi stromovou a štvorkanálovou štruktúrou MKDS?

Aktualizácia

Aká je to QMS banka filtrov?

Aktualizácia

V čom spočíva princíp polyfázového spracovania signálov (polyfázový decimačný a interpolačný filter)?

Aktualizácia

Čo znamená keď formálne namiesto $G(z)$ napíšeme $G(z^2)$?

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

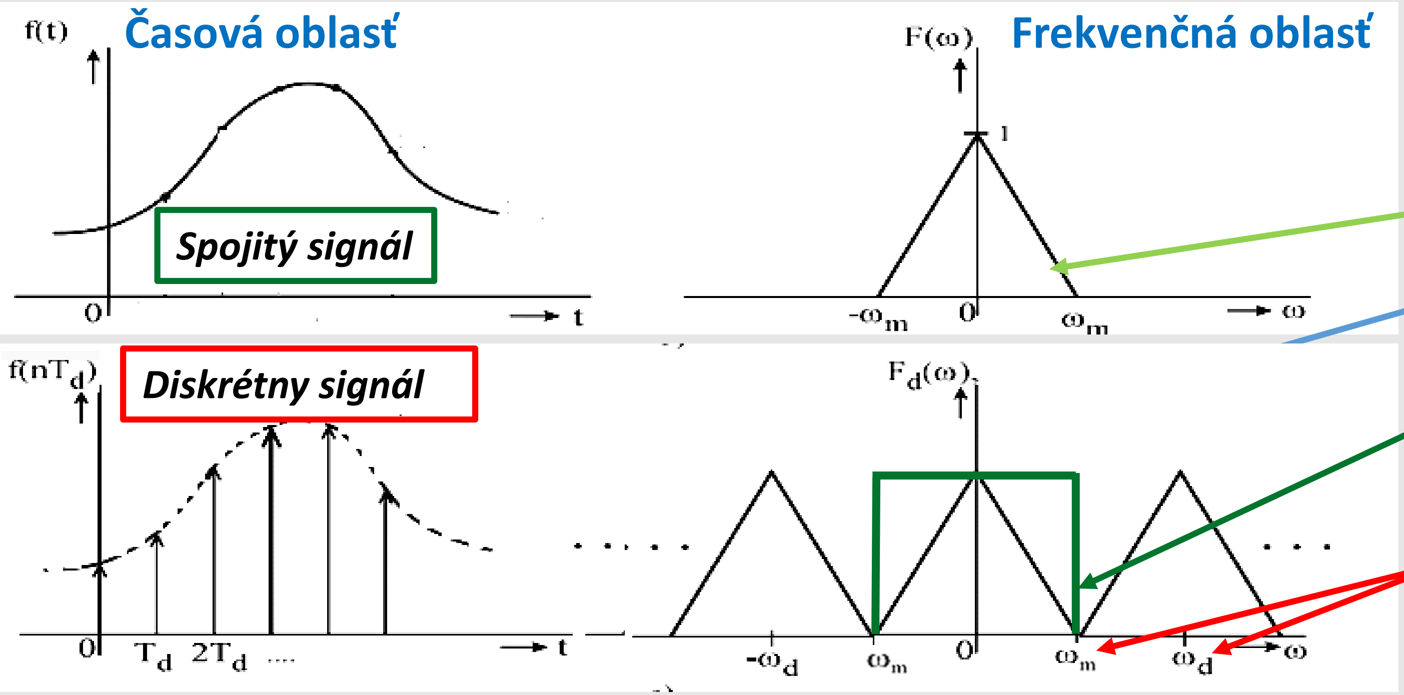
Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 7

- Aktualizácia
- **Diskrétna Fourierová transformácia a spektrálna analýza diskrétnych signálov**
- Časovo-frekvenčná analýza signálov

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Diskrétna Fourierová transformácia - Východiská



Na predchádzajúcich prednáškach sme pojednávali o nasledovných faktoch:

- Spektrum neperiodického signálu je spojité
- Spektrum diskrétneho signálu je spojité a periodické
- Pre obnovu signálu zvyčajne používame DP filter, ktorý prepustí len nultú kópiu spektra
- Vzorky signálu sa odoberajú s frekvenciou minimálne 2x vyššou ako je maximálna frekvenciacia signálu

- Tiež je známe, že spektrálnu analýzu neperiodického signálu vykonávame pomocou Fourierovej transformácie:

$$f(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \bar{F}(\omega)$$

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Modulové spektrum $F(\omega) = |\bar{F}(\omega)|$

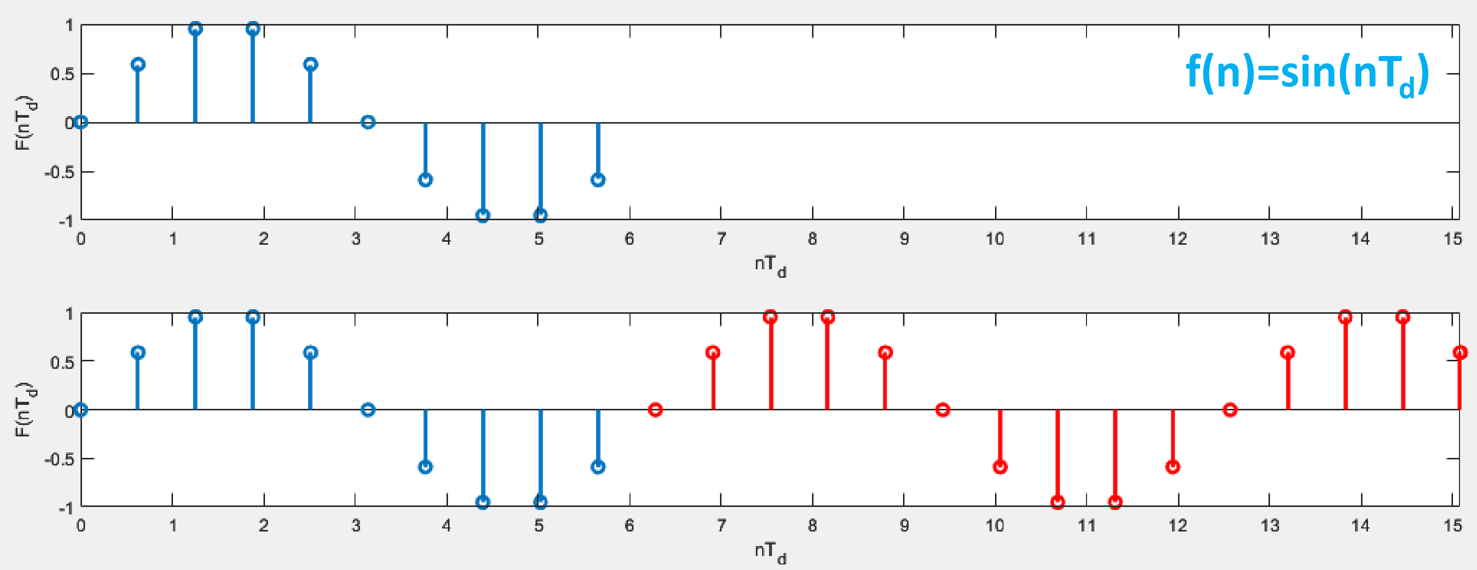
Argumentové spektrum

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\bar{F}(\omega)\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Im\left(\bar{F}(\omega)\right)}{Re\left(\bar{F}(\omega)\right)}\right)$$

Im *– imaginárna zložka komplexného čísla*
Re *– reálna zložka komplexného čísla*

Diskrétna Fourierová transformácia (DFT)

- Pre spektrálnu analýzu diskrétneho signálu sa nepoužíva Fourierova transformácia ale jej diskrétna podoba – DFT
- **DFT v podstate prevedie diskrétny signál z časovej oblasti (diskrétne časové okamihy nT_d) do frekvenčnej oblasti (diskrétne frekvenčné hodnoty).** ← **Nesúlad:** Vraveli sme, že **spektrum diskrétneho signálu je spojité!** Ono spojité naozaj je, ale DFT vychádza z predpokladu, že signál je definovaný na definovanom časovom intervale, teda má konečný počet vzoriek. Pri DFT sa táto konečná postupnosť N vzoriek speriodizuje, spektrum teda bude diskrétne ako pre periodický signál. **Pre praktickú spektrálnu analýzu je tento postup postačujúci.**
- **DFT spektrum je komplexné!**



$$f(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \bar{F}(k)$$

$$\bar{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Spektrum bude mať interval od 0 do 2π. Pričom počet spektrálnych zložiek bude rovnaký ako počet vzoriek vstupného signálu.

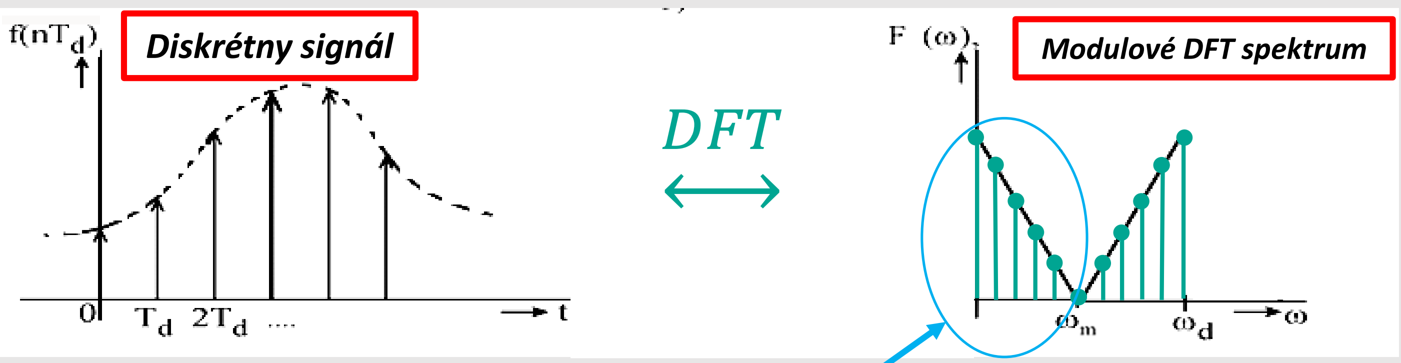
k-tá spektrálna zložka komplexného spektra.

Diskrétna Fourierová transformácia (DFT)

- Pre spektrálnu analýzu diskrétneho signálu sa nepoužíva Fourierova transformácia ale jej diskrétna podoba – DFT
- **DFT v podstate prevedie diskrétny signál z časovej oblasti (diskrétne časové okamihy nT_d) do frekvenčnej oblasti (diskrétne frekvenčné hodnoty).** ← **Nesúlad:** Vraveli sme, že **spektrum diskrétneho signálu je spojité!** Ono spojité naozaj je, ale DFT vychádza z predpokladu, že signál je definovaný na definovanom časovom intervale, teda má konečný počet vzoriek.
- Pri DFT sa konečná postupnosť N vzoriek signálu speriodizuje, spektrum teda bude diskrétne. **Pre praktickú spektrálnu analýzu je tento postup postačujúci.**
- **DFT spektrum je komplexné!**
- **Na rozdiel od spektra neperiodického signálu je symetrické okolo $\omega_d/2$ resp. ω_m** a nie okolo jednosmernej zložky.

$$f(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \bar{F}(k)$$

$$\bar{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

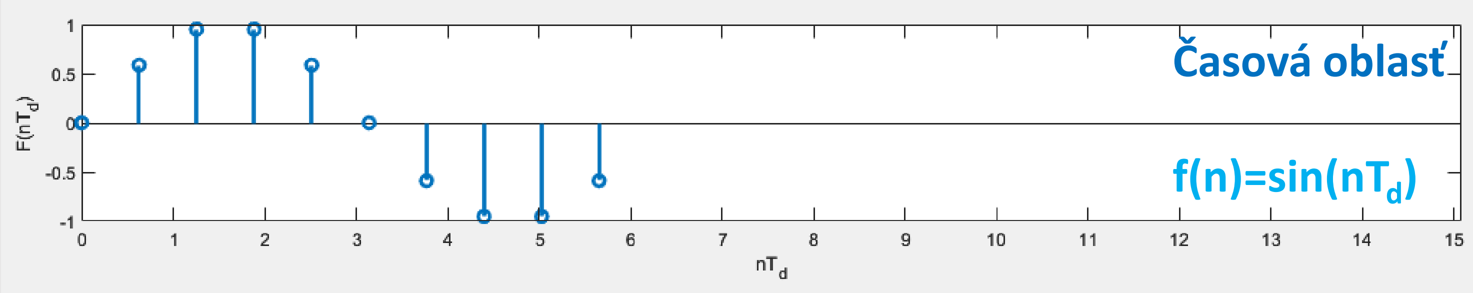


Prináša informáciu, ostatné zložky sú symetrické.

k-tá spektrálna zložka komplexného spektra.

Spektrum bude mať interval od 0 do 2π. Pričom počet spektrálnych zložiek bude rovnaký ako počet vzoriek vstupného signálu.

Diskrétna Fourierová transformácia (DFT)



Priama DFT $f(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \bar{F}(k)$

$$\bar{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

Spätna DFT $\bar{F}(k) \overset{IDFT}{\longleftrightarrow} f(n)$

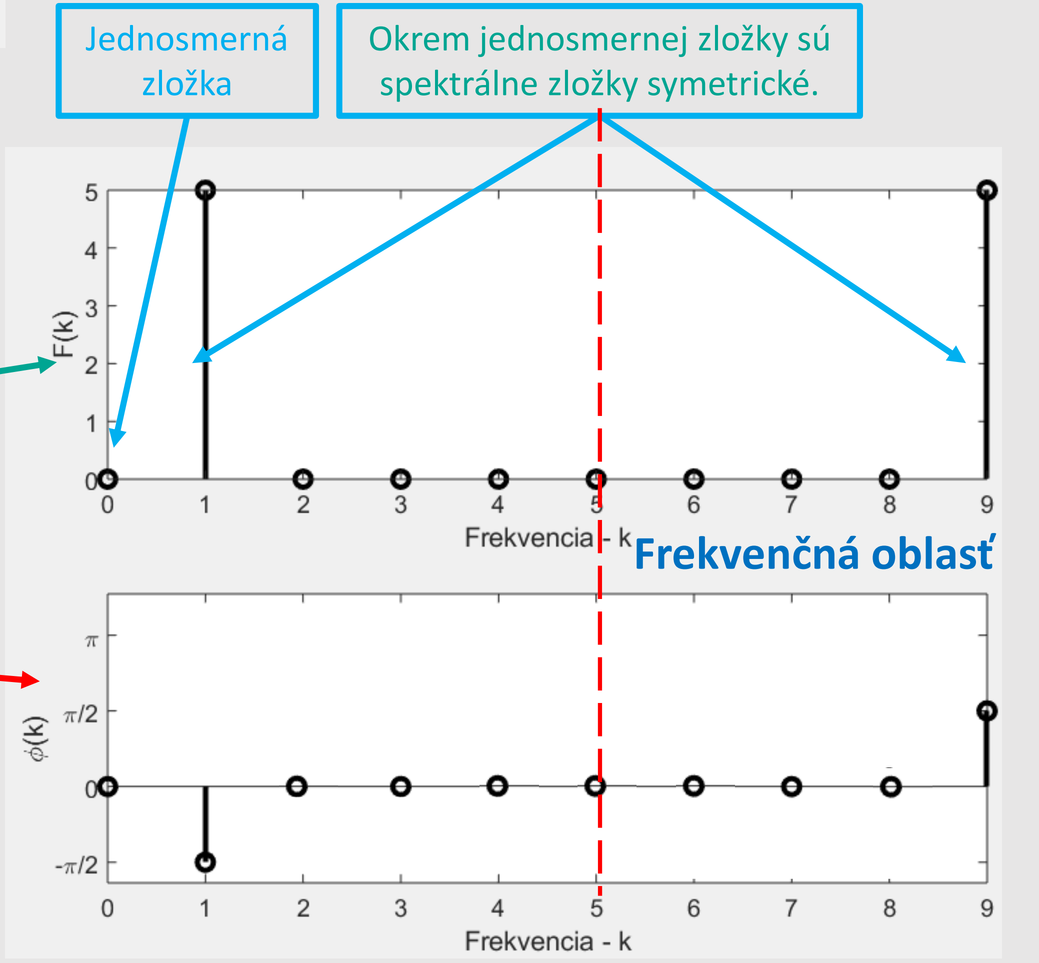
$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}(k) e^{j\frac{2\pi k n}{N}}$$

- V praxi sa používa hlavne **modulové spektrum**, ktoré je dané ako absolútna hodnota z komplexného spektra
- **Argumentové spektrum** predstavuje fázový posun danej frekvenčnej zložky

Modulové spektrum $F(k) = |\bar{F}(k)|$

Argumentové spektrum

$$\varphi(k) = \arg\left(\bar{F}(k)\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Im\left(\bar{F}(k)\right)}{Re\left(\bar{F}(k)\right)}\right)$$



DFT – Maticová forma

- Dá sa ukázať, že vzťah pre výpočet priamej DFT sa dá prepísať do maticovej podoby nasledovne:

$$\bar{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \rightarrow \bar{F} = \boldsymbol{U} f$$

Vstupný diskrétny signál – vektor N x 1

Transformačné jadro – matica N x N

Komplexné spektrálne koeficienty – vektor N x 1

$$e^{-j(k)(n)\frac{2\pi}{N}}$$

k – riadok, n- stĺpec

$$\bar{F} = \boldsymbol{U} f \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \vdots \\ \bar{F}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\,0} & e^{-j(1)(1)\frac{2\pi}{N}} & e^{-j(1)(2)\frac{2\pi}{N}} & & e^{-j(1)(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ e^{\,0} & e^{-j(2)(1)\frac{2\pi}{N}} & e^{-j(2)(2)\frac{2\pi}{N}} & & e^{-j(2)(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ e^{\,0} & e^{-j(N-1)(1)\frac{2\pi}{N}} & \cdots & & e^{-j(N-1)(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

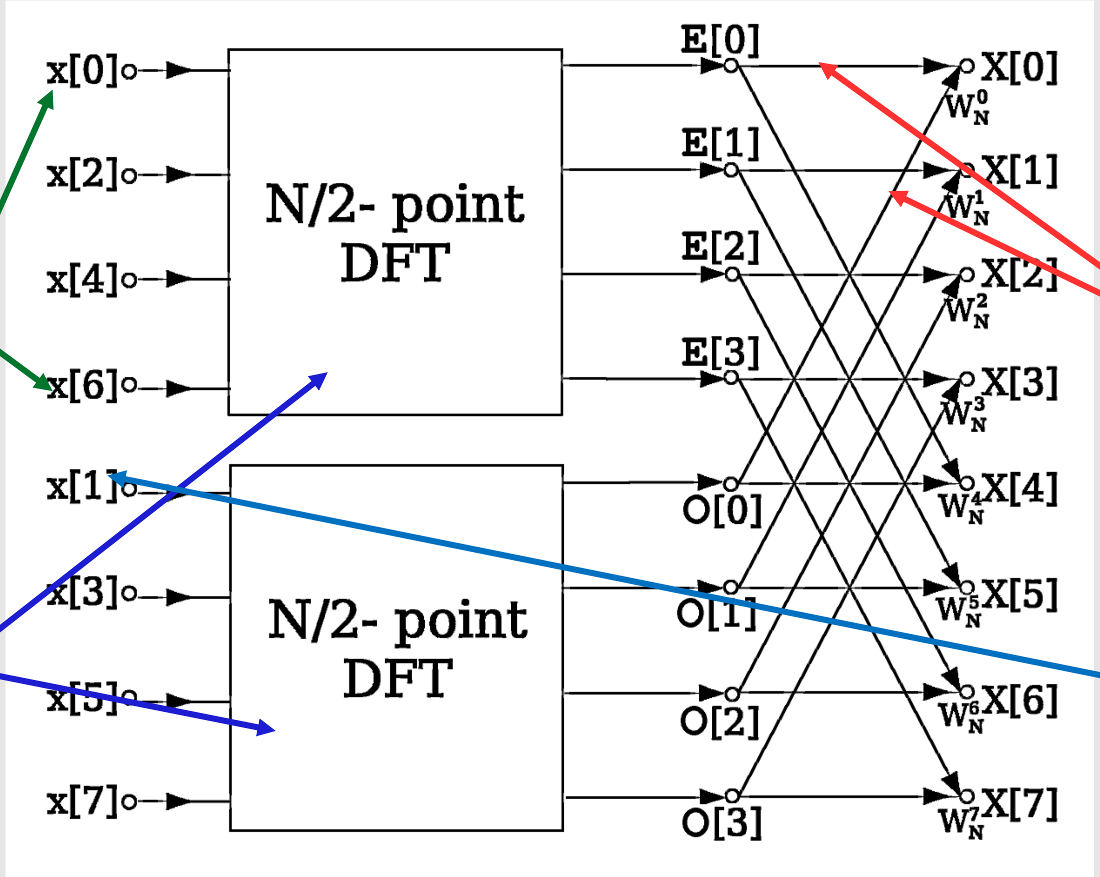
- **V praxi sa častejšie stretávame s maticovým spôsobom transformácie.**
- Zvyčajne sa signál analyzuje v presne definovaných dĺžkach (napr. 1024 vzoriek)
- Výpočet DFT je pomerne náročný na výpočtový výkon. **Existuje však rýchla implementácia FFT.**

DFT – Rýchla implementácia

- Výpočet DFT je pomerne náročný na výpočtový výkon. **Pre výpočet spektra pomocou DFT je potrebných N^2 komplexných operácií**. (Ak N=1024, tak počet operácií je viac ako milión!)
- **Existuje rýchly algoritmus výpočtu DFT. Nazýva sa Rýchla Fourierova transformácia (Fast Fourier Transform – FFT).**
- **Spektrum vypočítané pomocou DFT a FFT je totožné, ale výpočet je výrazne rýchlejší.**
- **Pre výpočet spektra pomocou FFT postačuje len $N.\log_2(N)$ operácií.** (ak N=1024, tak počet operácií je iba 10 240!)

Podstata algoritmu FFT spočíva v rozdelení vstupnej postupnosti vzoriek na párne a nepárne vzorky.

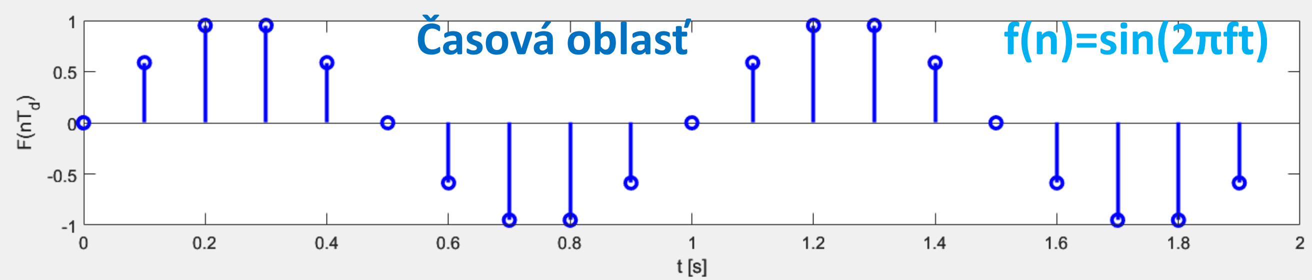
Na takto rozdelené postupnosti (2x kratšie ako pôvodný signál) sa aplikuje klasický algoritmus DFT.

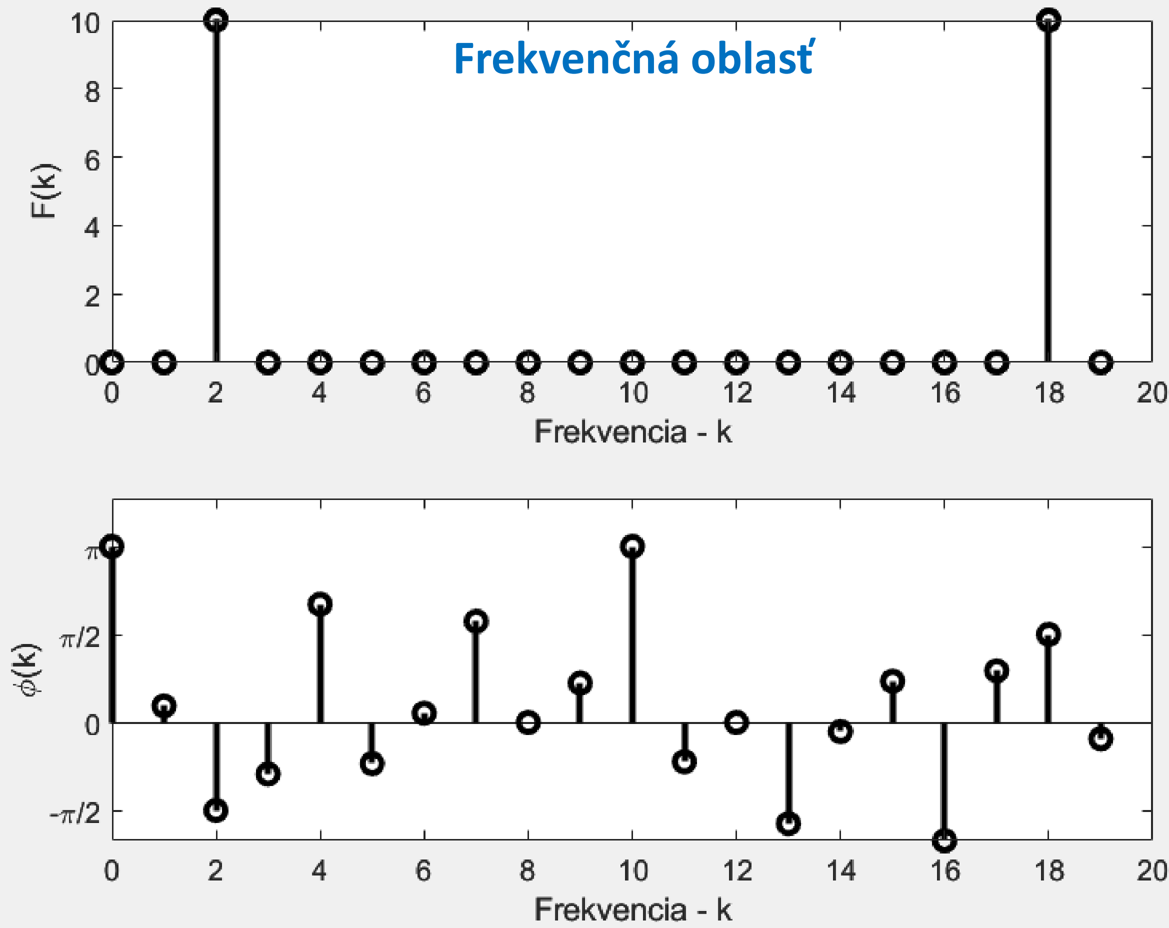


Čiastkové spektra získané z párnych a nepárnych vzoriek sa násobia konštantami *(W)* a „krížovo“ sčítajú!

Vstupná postupnosť musí mať dĺžku mocniny 2. Ak je signál kratší, doplní sa nulami!

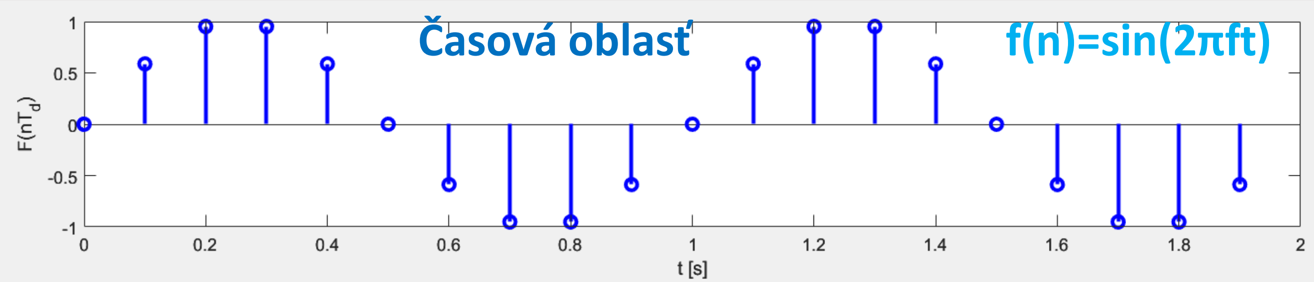
Spektrálna analýza diskrétnych signálov

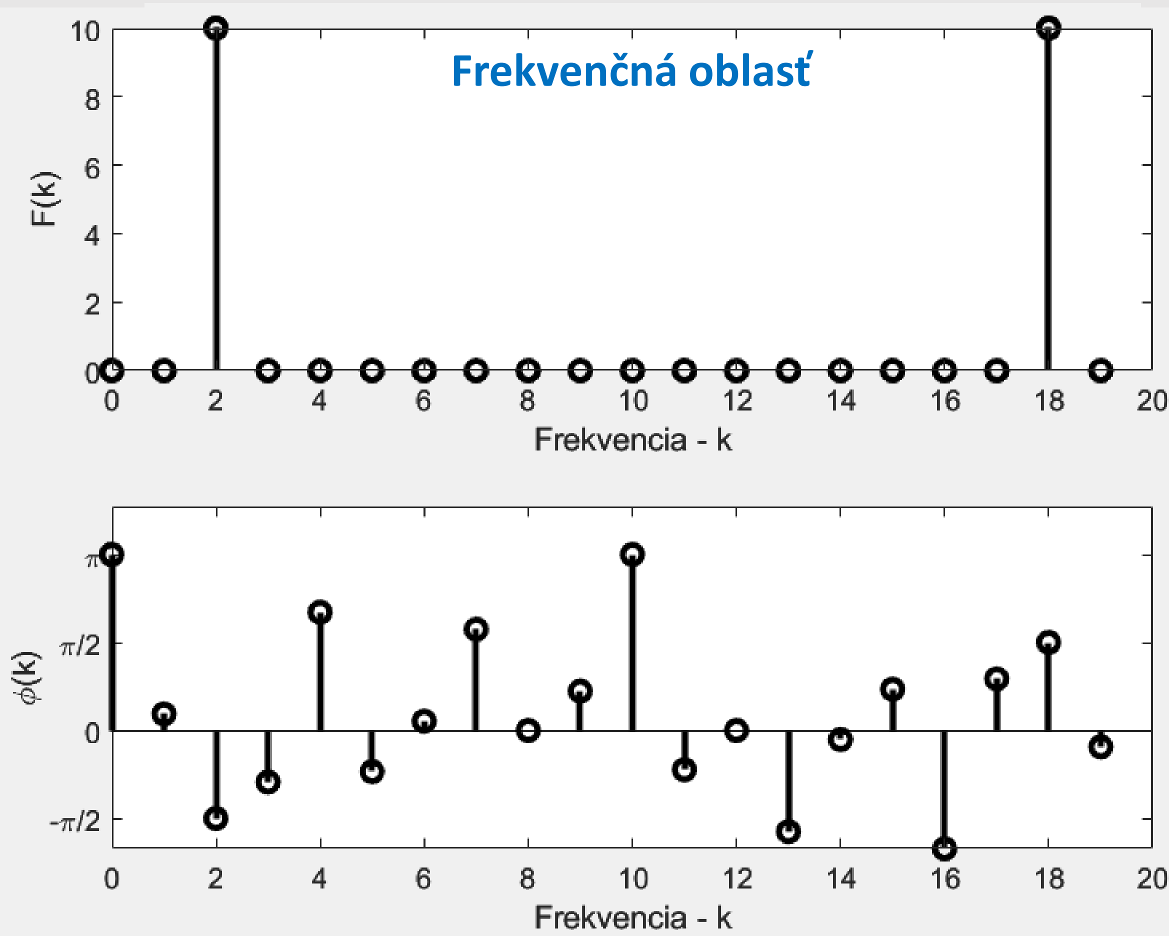




- Predpokladajme, že signál bol **vzorkovaný frekvenciou 10 Hz**.
- Z grafu priebehu signálu nie je problém odčítať frekvenciu signálu, ktorá je 1Hz.
- *Spektrálnu analýzu vykonáme pomocou MATLABu s využitím príkazov fft(), abs() a angle().*
- **Aké frekvencie v Hz sú zobrazené v grafoch spektra?**

Spektrálna analýza diskrétnych signálov





- Vieme, že pre **k=10** bude **$\omega=\pi$**, čo je najvyššia možná frekvencia, ktorú je možné z grafu odčítať. Pre vzorkovaný signál, ak bola splnená Nyquistova podmienka, bude teda pre k=10 frekvencia **$\omega_d/2 \rightarrow f_d/2$ = 5Hz.** **Teda pre tento príklad je jednoduché určiť, že k=1 predstavuje frekvenciu 0.5 Hz**.

- Vo všeobecnosti platí:

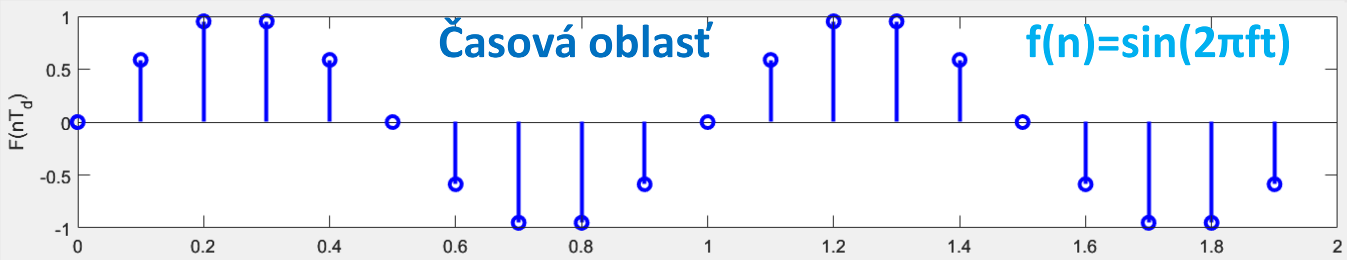
$$\boldsymbol{f} = k\frac{f_d}{N}\,[Hz]$$

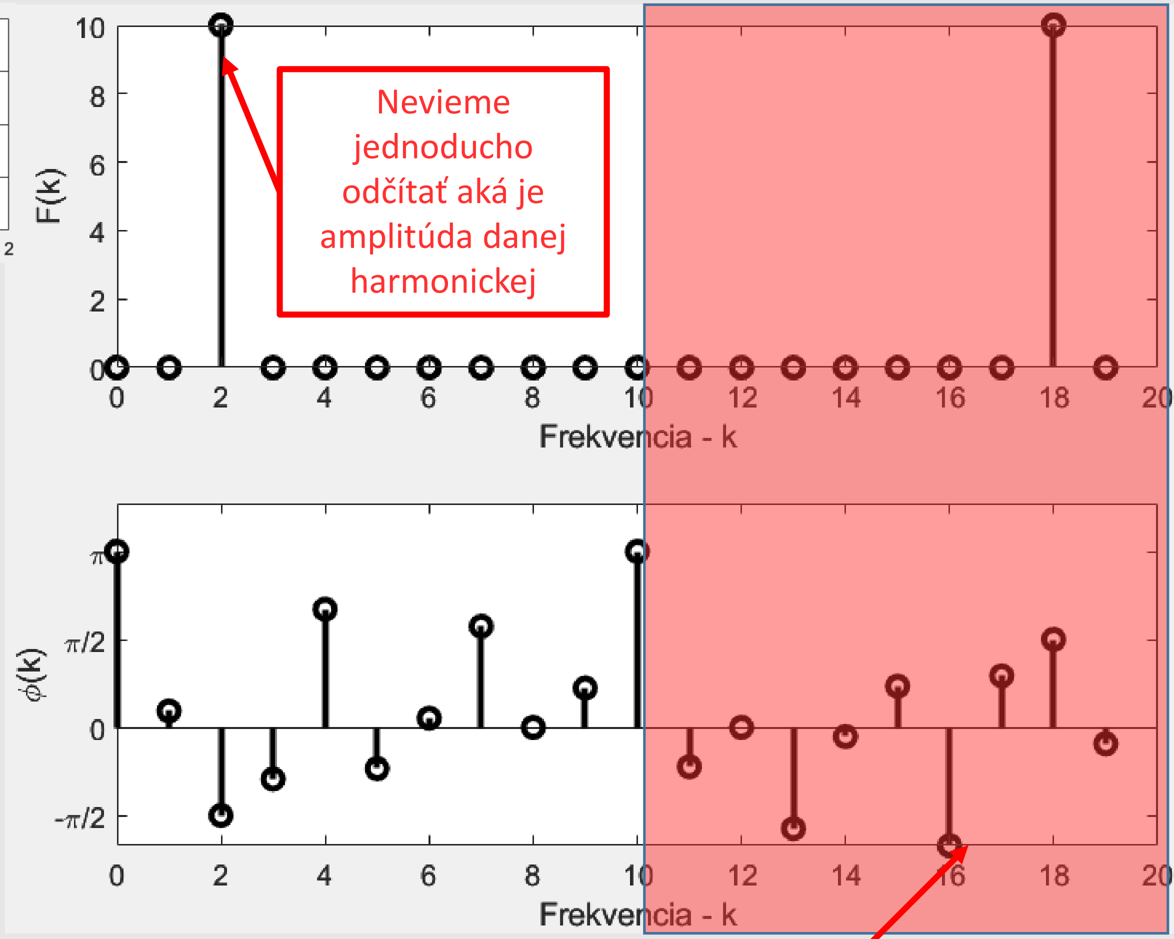
- Ak nepoznáme vzorkovaciu frekvenciu tak uvádzame iba uhlovú frekvenciu **ω**!

$$\boldsymbol{\omega} = k\frac{2\pi}{N}\,[rad.s^{-1}]$$

N – počet vzoriek
Odporúča sa voliť taký počet vzoriek, aby bol mocninou čísla 2. (Nie je to nutné ale žiadúce.

Spektrálna analýza diskrétnych signálov





- Vieme, že pre **k=10** bude **$\omega=\pi$**, čo je najvyššia možná frekvencia, ktorú je možné z grafu odčítať. Pre vzorkovaný signál, ak bola splnená Nyquistova podmienka, bude teda pre k=10 frekvencia **$\omega_d/2 \rightarrow f_d/2$ = 5Hz. Teda pre tento príklad je jednoduché určiť, že k=1 predstavuje frekvenciu 0.5 Hz**.

- Vo všeobecnosti platí:

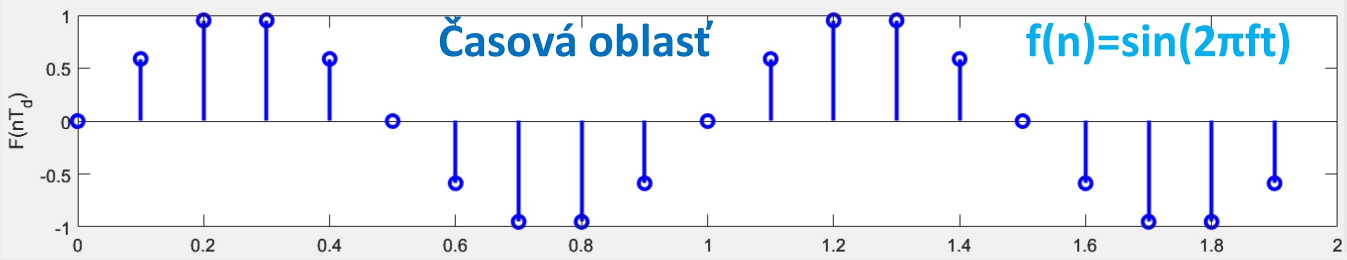
$$\boldsymbol{f} = k\frac{f_d}{N}[Hz]$$

- Ak nepoznáme vzorkovaciu frekvenciu tak uvádzame iba uhlovú frekvenciu **ω!**

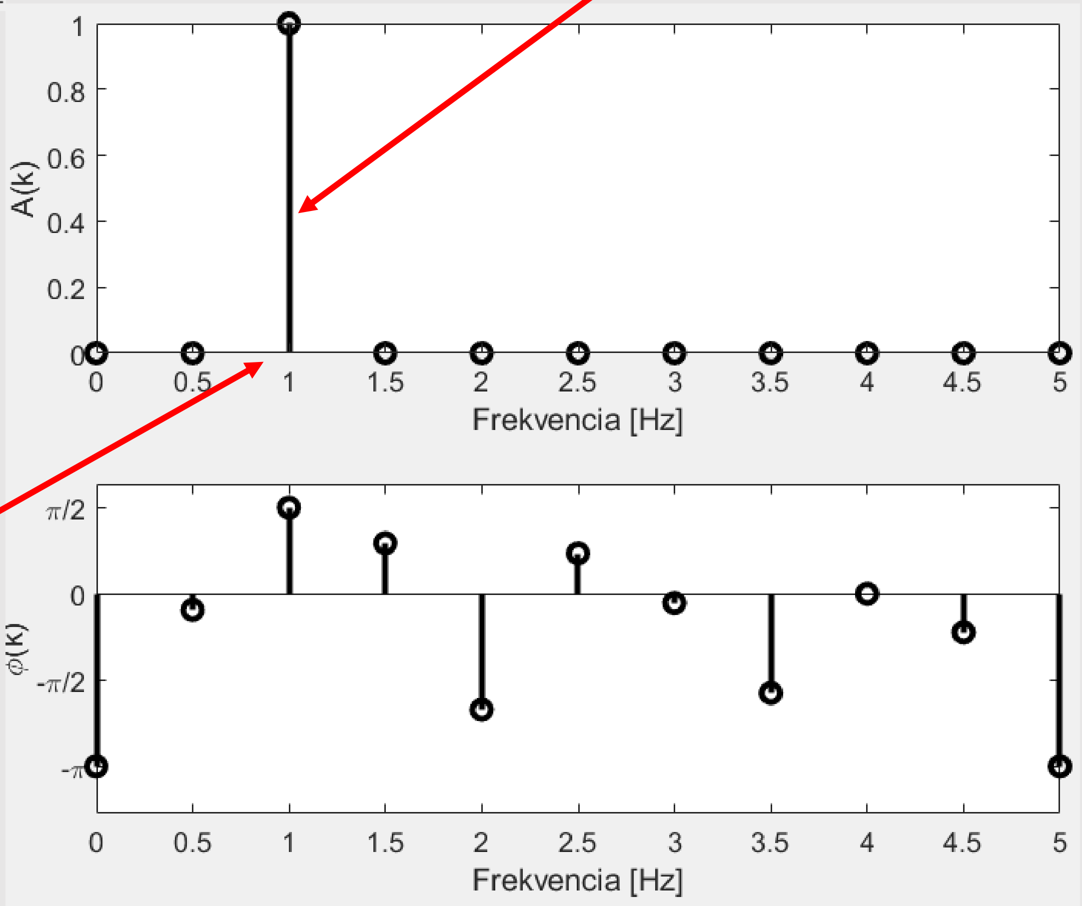
$$\boldsymbol{\omega} = k\frac{2\pi}{N}[rad.s^{-1}]$$

Neprináša informáciu, lepšie je použiť amplitúdové spektrum (jednostranné)

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum



Amplitúdové spektrum je jednostranné. Spektrálne čiary sú dvojnásobne vysoké oproti modulovému spektru (okrem jednosmernej zložky, tá ostáva rovnaká).

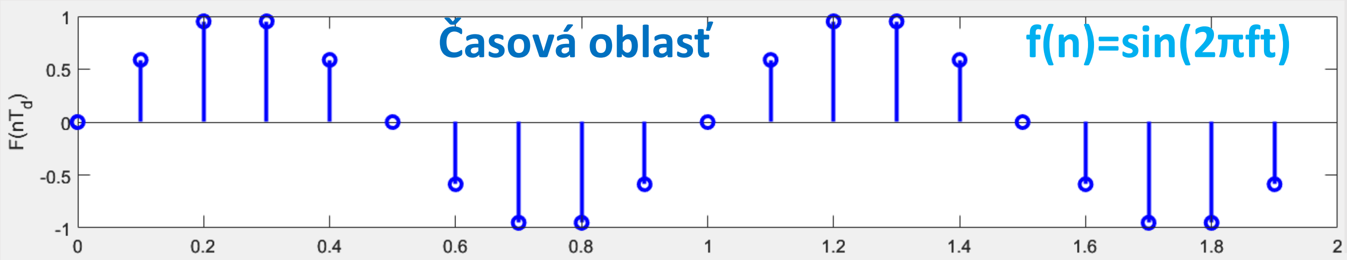


Medzi amplitúdovým a modulovým spektrom a tiež medzi fázovým a argumentovým spektrom platia nasledovné vzťahy:

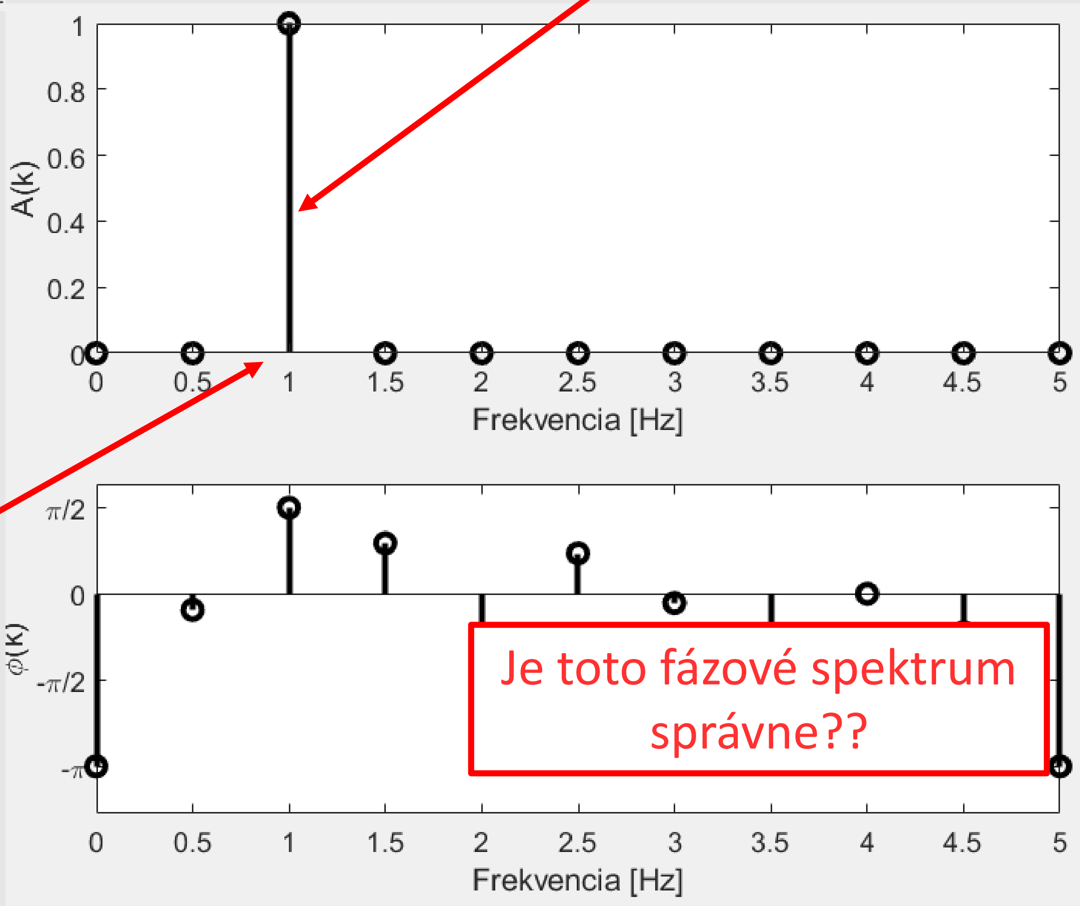
$$\boldsymbol{A_0 = F_0} \qquad \boldsymbol{A_k = \frac{2}{N} F_k} \qquad \boldsymbol{\Psi_k = -\varphi_k}$$

$$\boldsymbol{f} = k \frac{f_d}{N} [Hz]$$

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum



Amplitúdové spektrum je jednostranné. Spektrálne čiary sú dvojnásobne vysoké oproti modulovému spektru (okrem jednosmernej zložky, tá ostáva rovnaká).



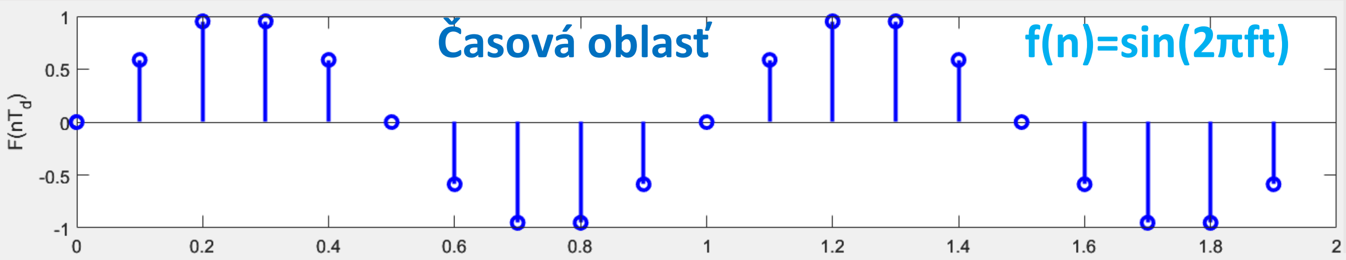
Medzi amplitúdovým a modulovým spektrom a tiež medzi fázovým a argumentovým spektrom platia nasledovné vzťahy:

$$\boldsymbol{A_0 = F_0} \qquad \boldsymbol{A_k = \frac{2}{N} F_k} \qquad \boldsymbol{\Psi_k = -\varphi_k}$$

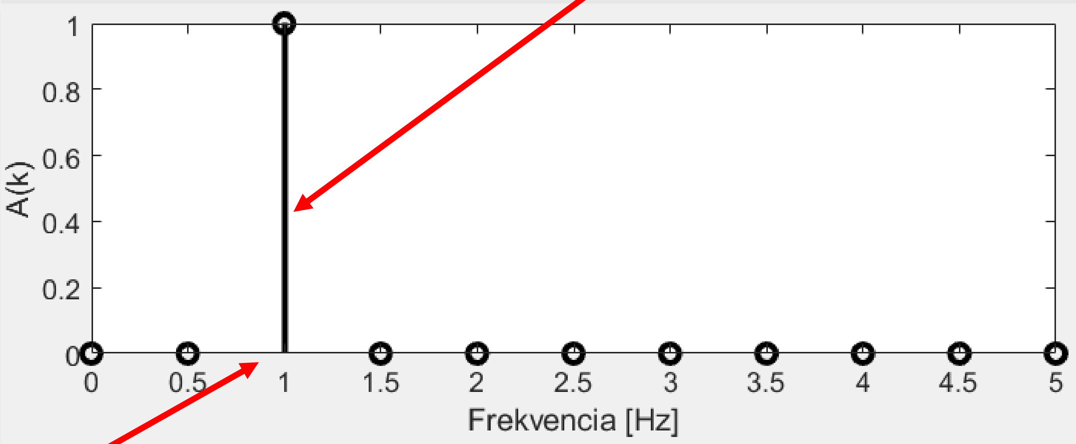
$$\boldsymbol{f} = k\frac{f_d}{N}\,[Hz]$$

Je toto fázové spektrum správne??

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum



Amplitúdové spektrum je jednostranné. Spektrálne čiary sú dvojnásobne vysoké oproti modulovému spektru (okrem jednosmernej zložky, tá ostáva rovnaká).



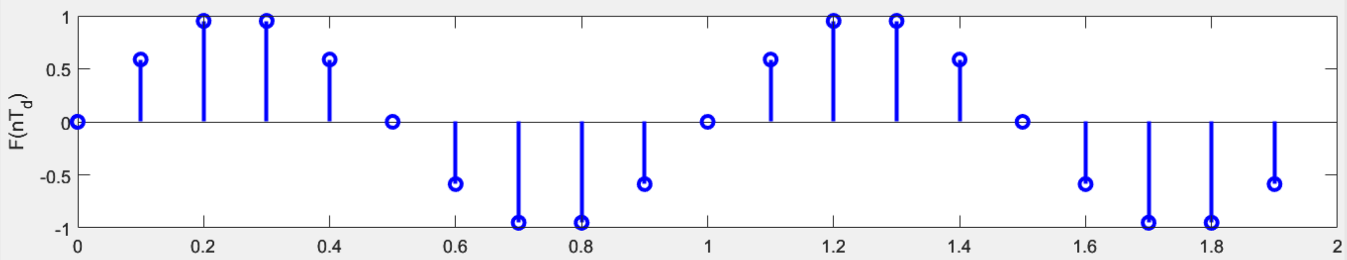
Medzi amplitúdovým a modulovým spektrom a tiež medzi fázovým a argumentovým spektrom platia nasledovné vzťahy:

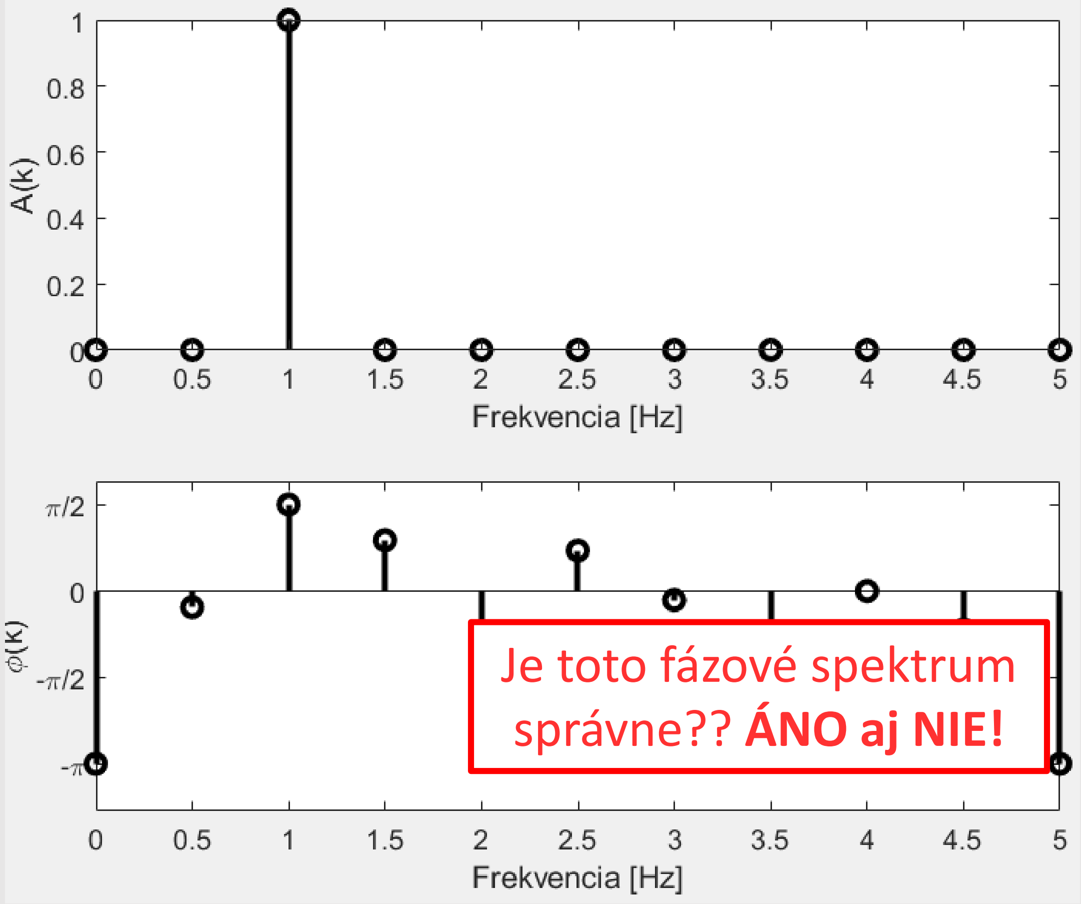
$$\boldsymbol{A_0 = F_0} \qquad \boldsymbol{A_k = \frac{2}{N} F_k} \qquad \boldsymbol{\Psi_k = -\varphi_k}$$

$$f = k\frac{f_d}{N}\,[Hz]$$

Je toto fázové spektrum správne?? **ÁNO aj NIE!**

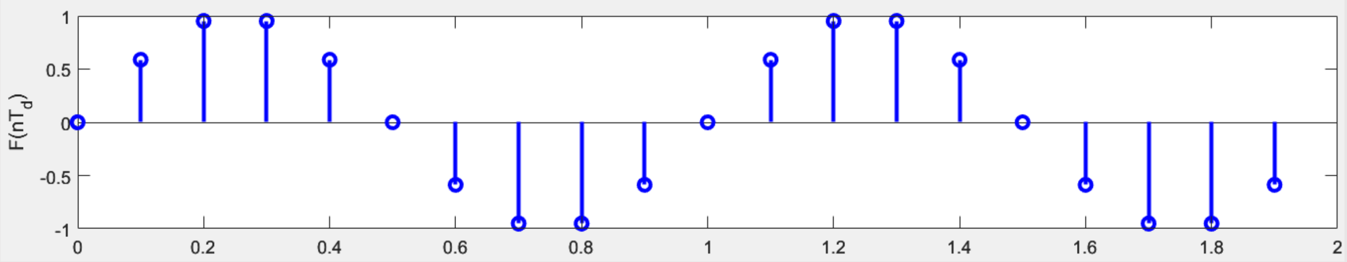
Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum

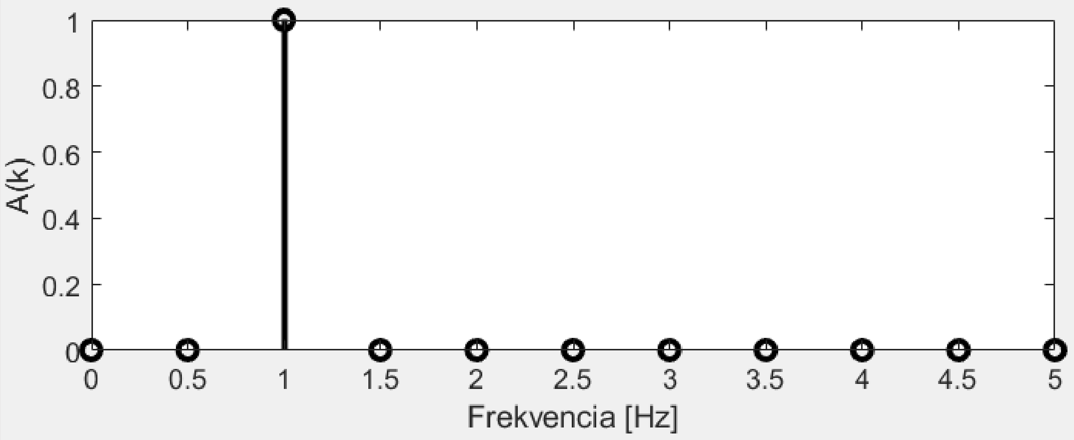




Spektrálna analýza bola vykonaná v MATLABe. Skúsme sa bližšie pozrieť na komplexné spektrum a na kód, ktorý bol použitý na výpočet spektier.

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum






```
fdis = 10;                  % Nastavenie vzorkovacej frekvencie
t = 0:1/fdis:2-1/fdis;      % diskretizácia času t->nTd

f = sin(2*pi*1*t);          % Výpočet diskrétnych hodnôt pre f(t)

F = fft(f);                 % Výpočet komplexného spektra
MF = abs(F);                % Absolútna hodnota
AF = MF/length(MF);         % Normovanie
AF(2:end)=2*MF(2:end);      % Výpočet Ampl. spektra
faza =  -angle(F);          % Výpoečet fázového spektra
```

Všimnime si, že prvky vektora F (komplex. spektrum) sú veľmi malé, ale nenulové!

Teda, príkaz pre výpočet fázy naozaj vypočíta nejakú fázu aj pre tieto zložky!

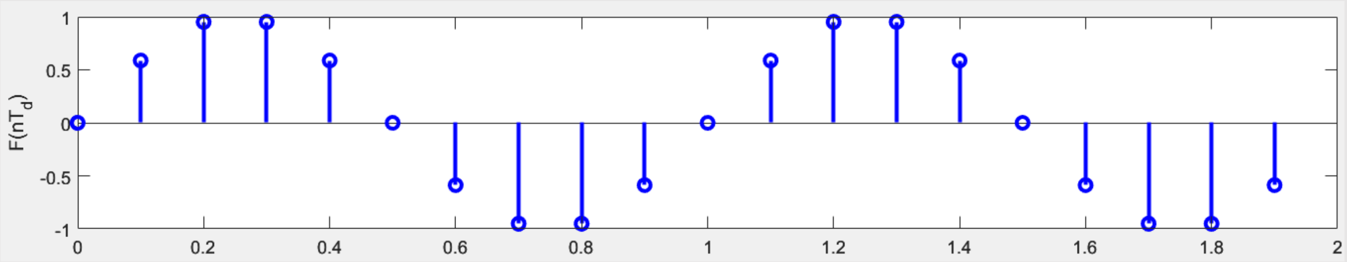
Tento problém zapríčiňuje konečná presnosť MATLABu a je potrebné s týmto počítať.

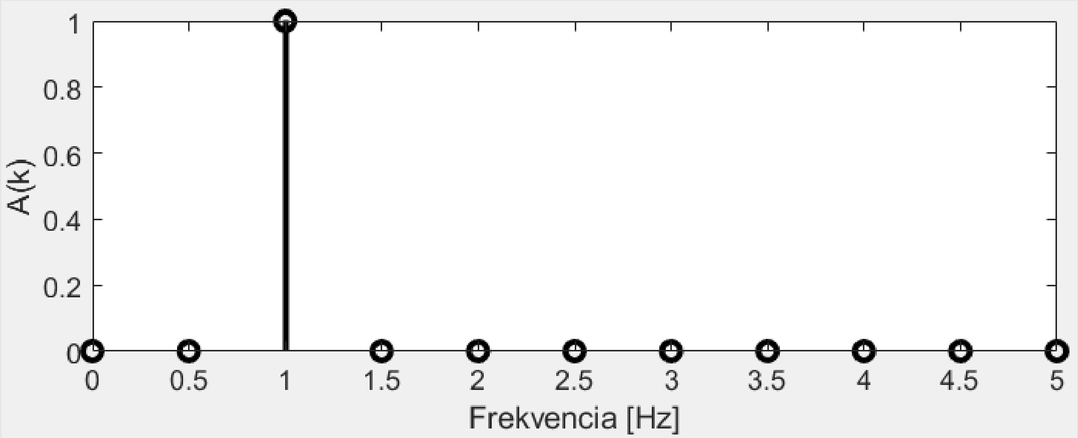
F

1x20 complex double

	1	2	3	4	5
1	-2.2433e-15 + 0.00...	1.5934e-15 + 4.8059e-16i	-0.0000 - 10.0000i	1.7929e-15 - 2.3662e-15i	-6.4640e-16 + 1.0830e-15i

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum






```
fdis = 10;                  % Nastavenie vzorkovacej frekvencie
t = 0:1/fdis:2-1/fdis;      % diskretizácia času t->nTd

f = sin(2*pi*1*t);          % Výpočet diskrétnych hodnôt pre f(t)

F = fft(f);                 % Výpočet komplexného spektra
F(abs(F)<0.0001)=0;
MF = abs(F);                % Absolútna hodnota
AF = MF/length(MF);         % Normovanie
AF(2:end)=2*AF(2:end);      % Výpočet Ampl. spektra
faza =  -angle(F);          % Výpoečet fázového spektra
```

F

1x20 complex double

	1	2	3	
1	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 10.0000i	0.

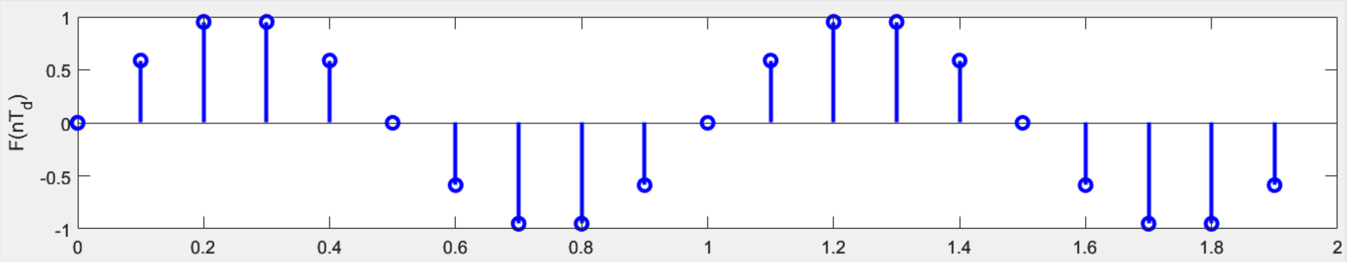
Všimnime si, že prvky vektora F (komplex. spektrum) sú veľmi malé, ale nenulové!

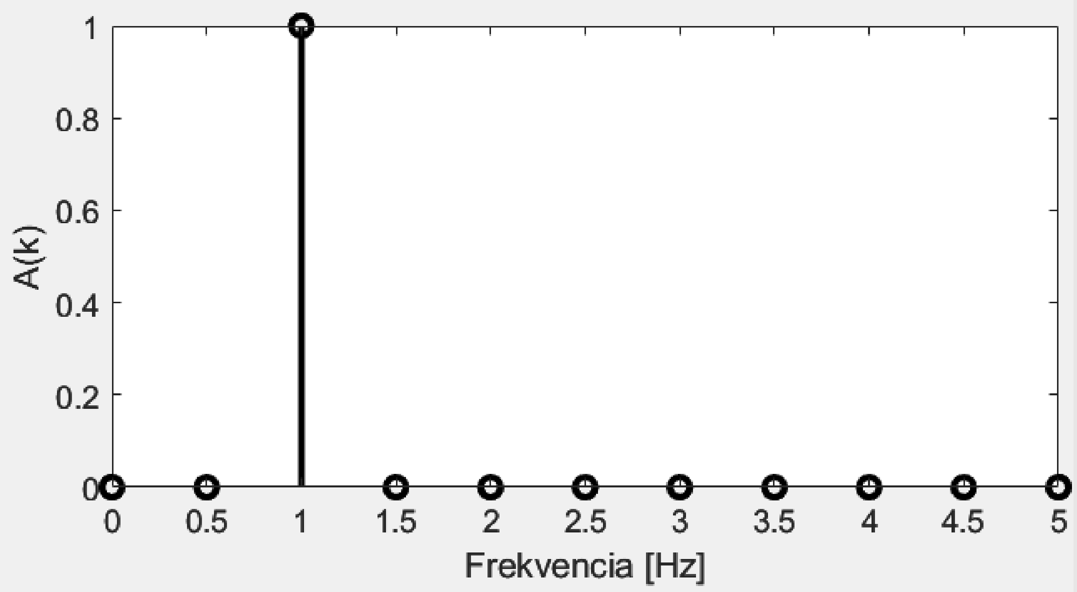
Teda, príkaz pre výpočet fázy naozaj vypočíta nejakú fázu aj pre tieto zložky!

Tento problém zapríčiňuje konečná presnosť MATLABu a je potrebné s týmto počítať.

Riešenie: Veľmi malé hodnoty spektra (napr. menej ako 0.0001) potlačíme na nulu.

Spektrálna analýza diskrétnych signálov – Ampl. spektrum



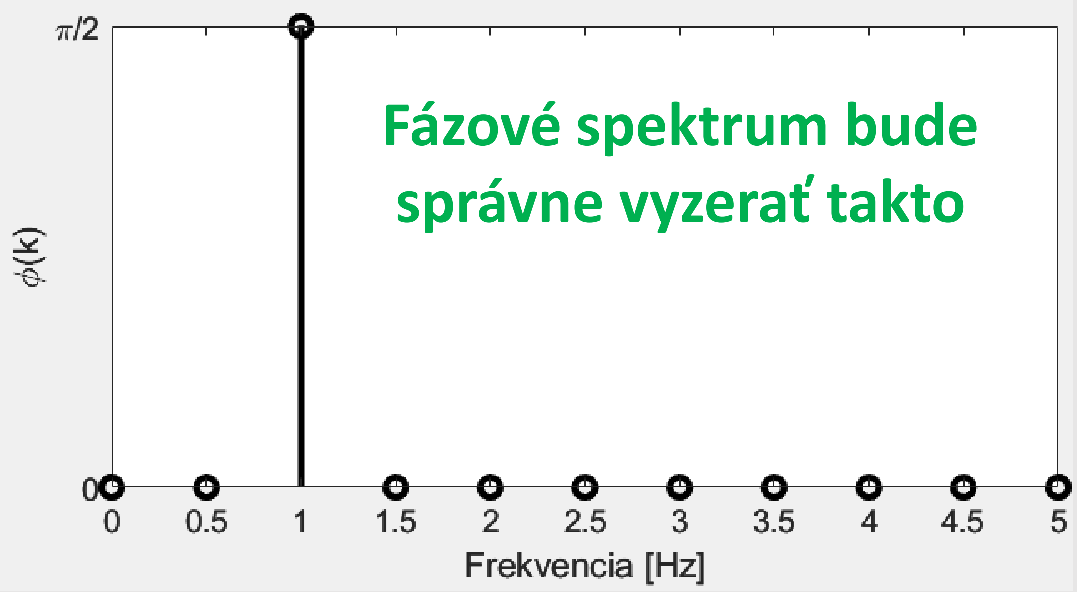


Všimnime si, že prvky vektora F (komplex. spektrum) sú veľmi malé, ale nenulové!

Teda, príkaz pre výpočet fázy naozaj vypočíta nejakú fázu aj pre tieto zložky!

Tento problém zapríčiňuje konečná presnosť MATLABu a je potrebné s týmto počítať.

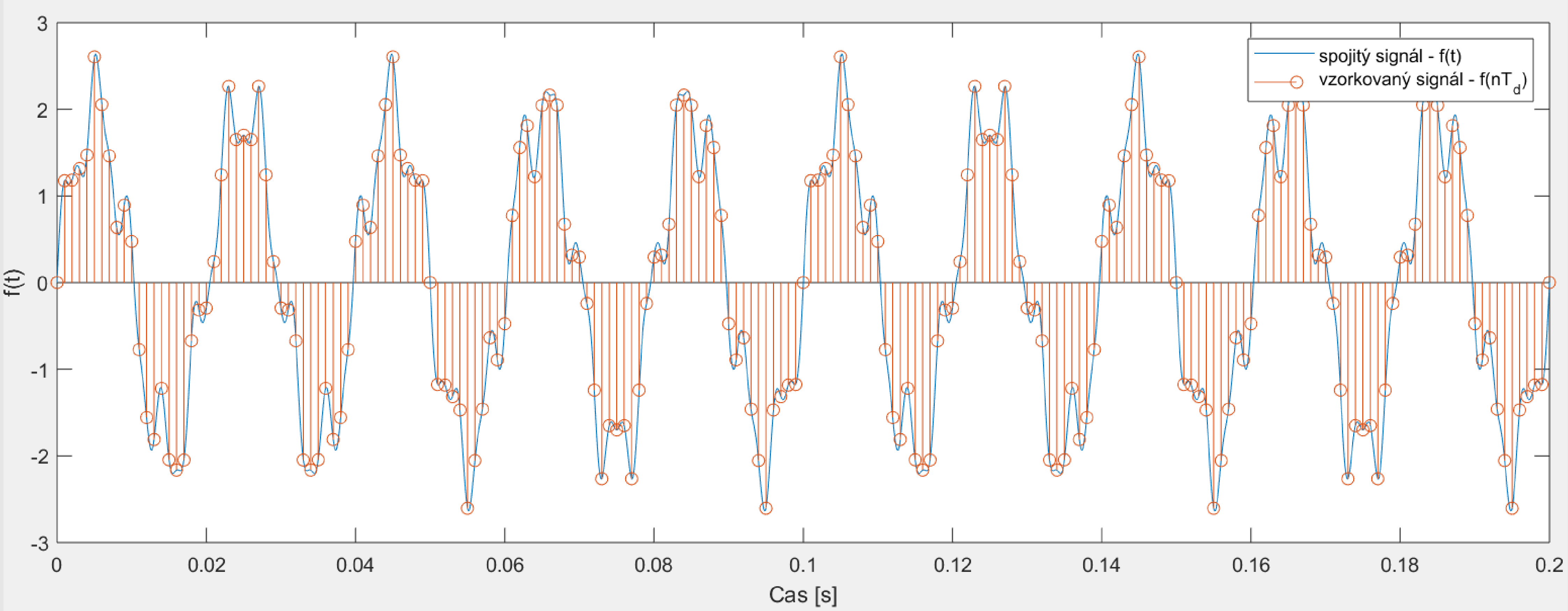
Riešenie: Veľmi malé hodnoty spektra (napr. menej ako 0.0001) potlačíme na nulu.



Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{f_d=1kHz}$.
- Uvažujme, že máme záznam tohto signálu v trvaní **0.2s**

- **Zobrazte jeho amplitúdové spektrum!**



Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou **f_d=1kHz.**
- Uvažujme, že máme záznam tohto signálu v trvaní **0.2s**

- **Zobrazte jeho amplitúdové spektrum!**

V praxi je potrebné počítať s tým, že spektrálne analyzátory na obrazovke zvyčajne zobrazujú spektrum v spojitej a nie diskrétnej podobe. Platí to aj pre digitálne spektrálne analyzátory.

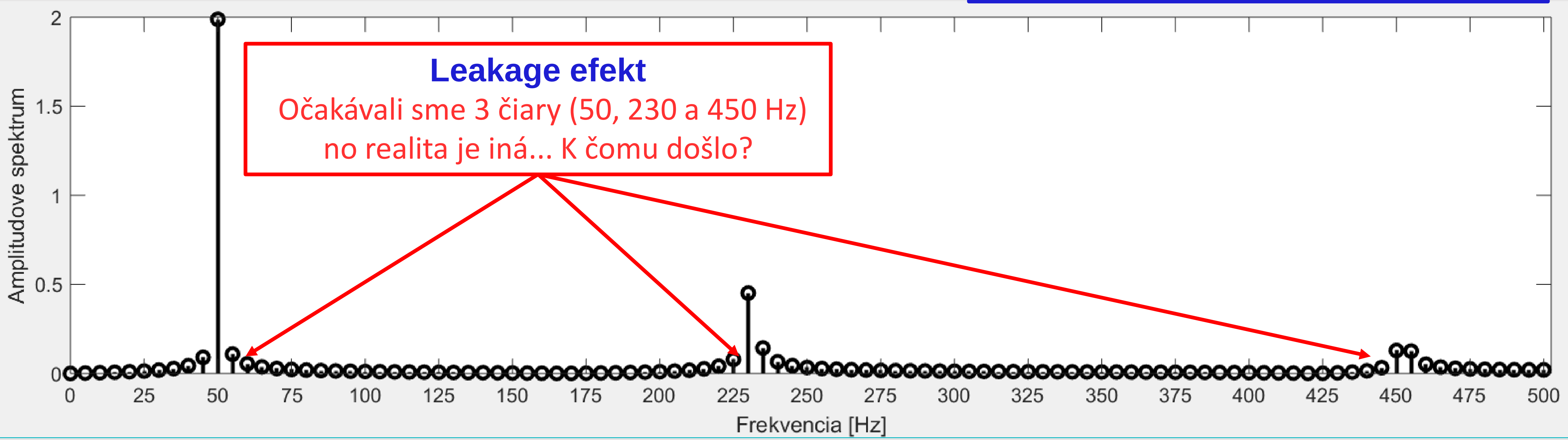
Na správnych frekvenciách vidíme špičky. Tieto špičky sú však „akosi široké“. Dochádza k takzvanému spektrálnemu **leakage efektu.**

Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou **f_d=1kHz.**
- Uvažujme, že máme záznam tohto signálu v trvaní **0.2s**

- **Zobrazte jeho amplitúdové spektrum!**

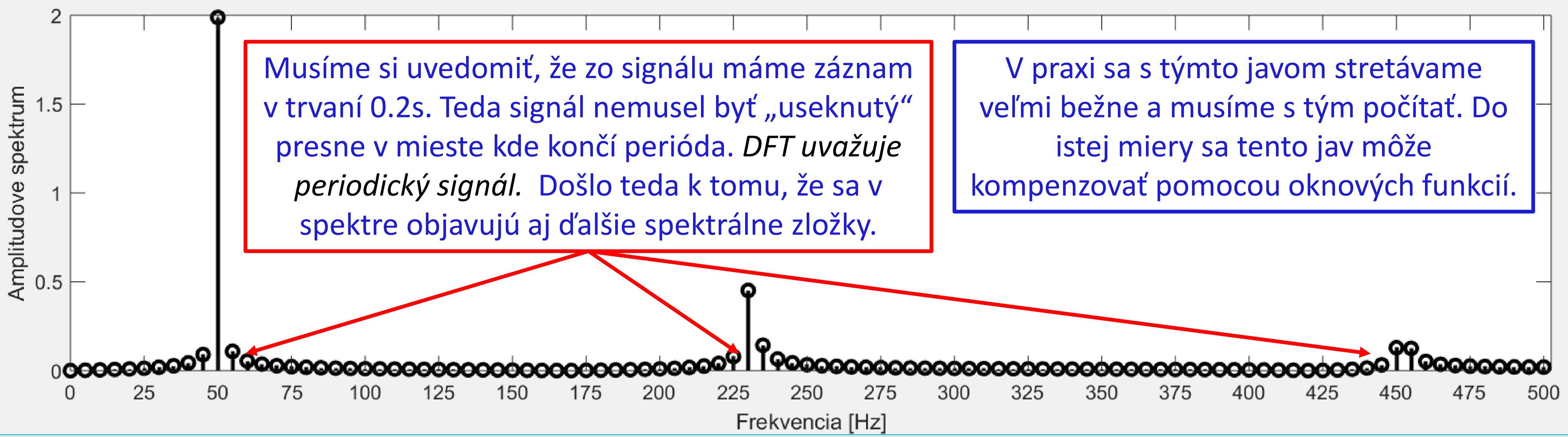
Pri numerickej spektrálnej analýze (napr. pomocou MATLABu) sa skôr stretávame s diskrétnym zobrazením spektra.



Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{f_d=1kHz}$.
- Uvažujme, že máme záznam tohto signálu v trvaní **0.2s**

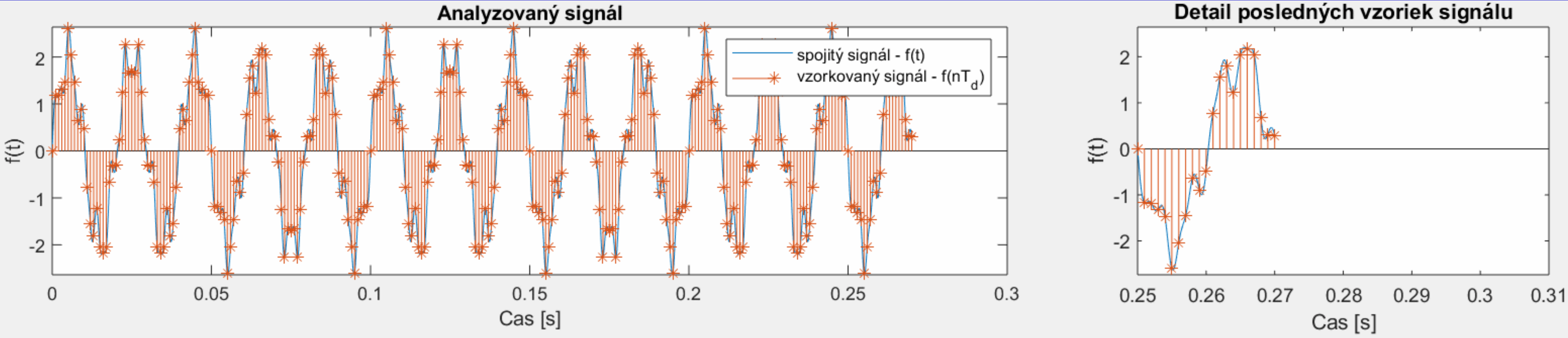
- **Zobrazte jeho amplitúdové spektrum!**

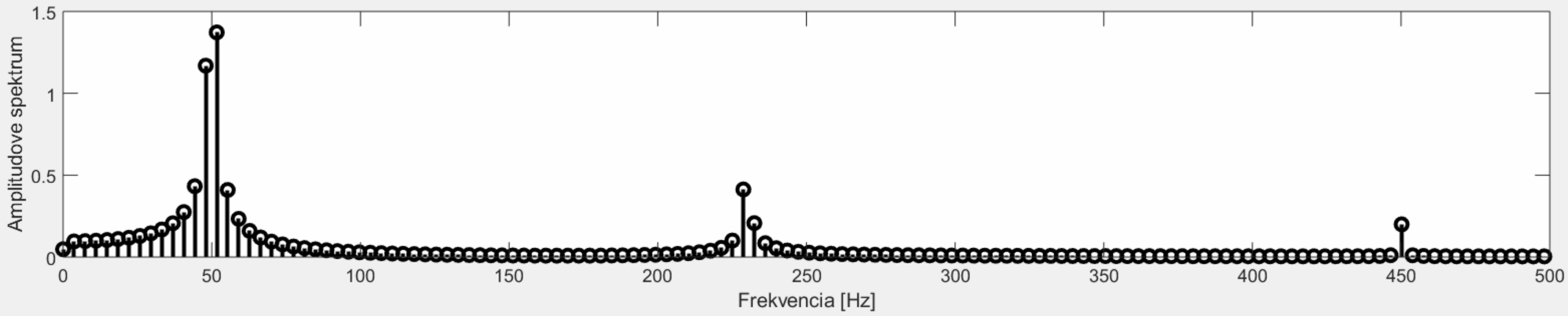


Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{f_d=1kHz}$.

Čisto z matematického hľadiska je potrebné iba presne určiť dĺžku analyzovaného signálu. Teda **dĺžka analyzovaného signálu musí byť celočíselný násobok periódy!**

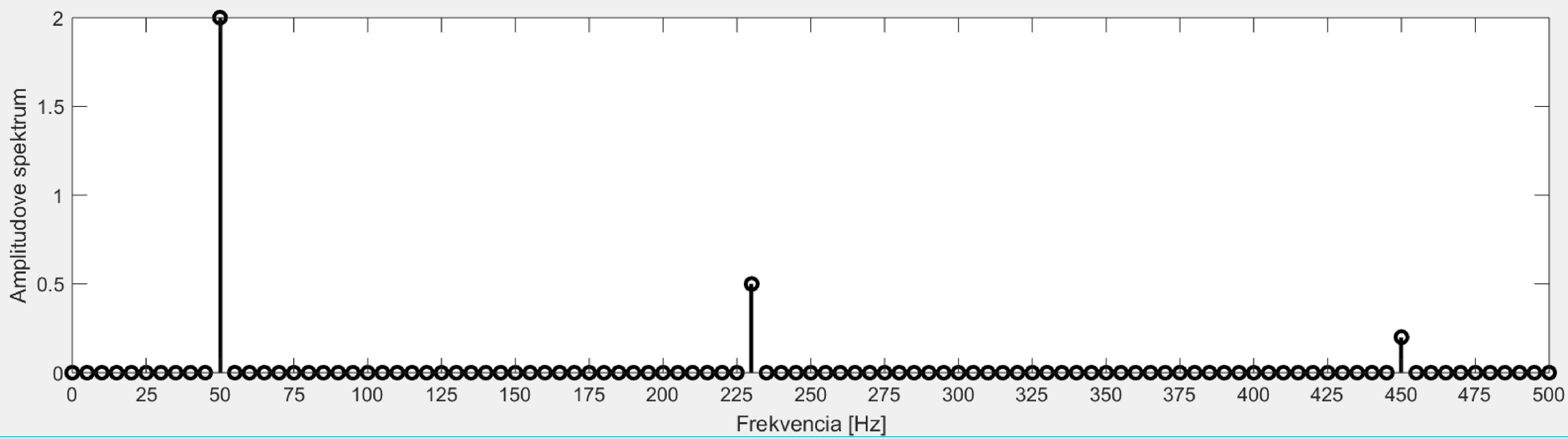




Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- Uvažujme nasledovný multiharmonický signál: $f(t) = 2\sin(2\pi\mathbf{50}t) + 0.5\sin(2\pi\mathbf{230}t) + 0.2\sin(2\pi\mathbf{450}t)$
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{f_d=1kHz}$.

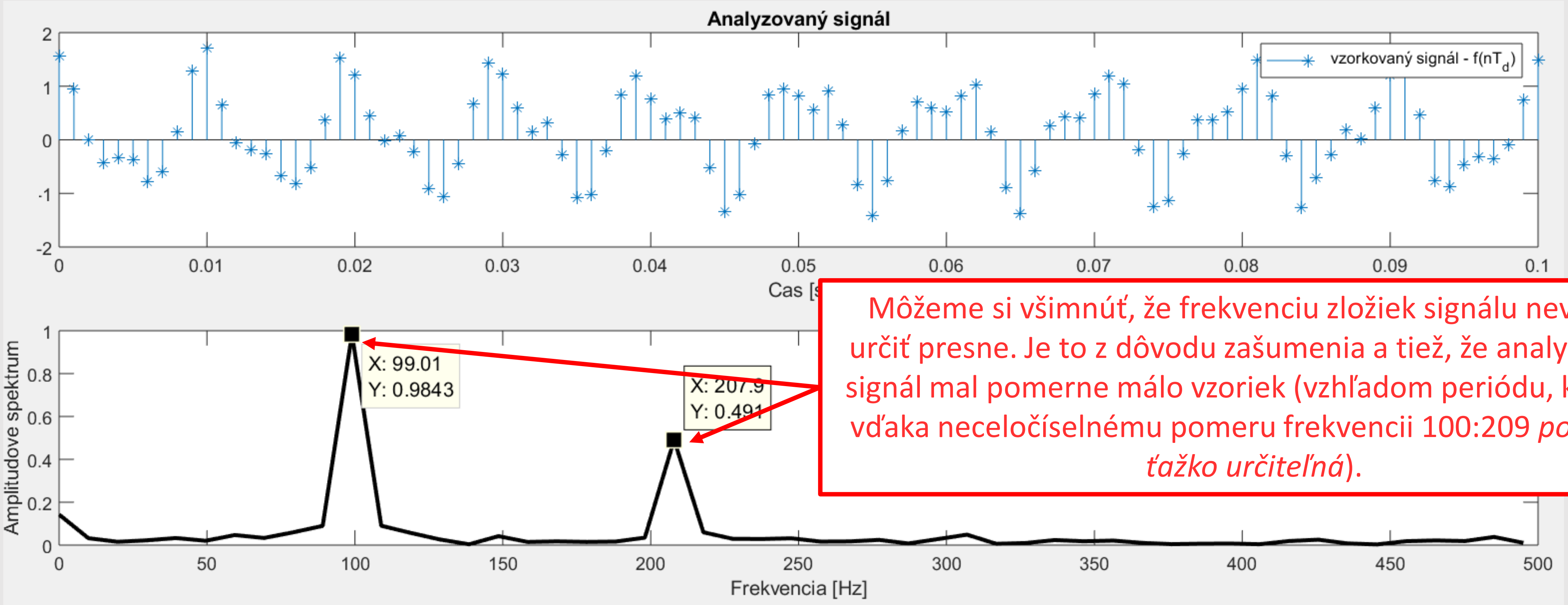
Čisto z matematického hľadiska je potrebné iba presne určiť dĺžku analyzovaného signálu. Teda **dĺžka analyzovaného signálu musí byť celočíselný násobok periódy!**



Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- **Uvažujme nasledovný multiharmonický signál:** $f(t) = \cos(2\pi\mathbf{100}t) + 0.5\cos(2\pi\mathbf{209}t) + šum$
    - *Šum uvažujeme aditívny biely šum s nulovou strednou hodnotou a hodnotami v rozmedzí -0.3 až +0.3.*
- Predpokladajme, že tento signál bol vzorkovaný vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{f_d}$**=1kHz.**
- Uvažujme, že máme záznam tohto signálu v trvaní **0.1s**

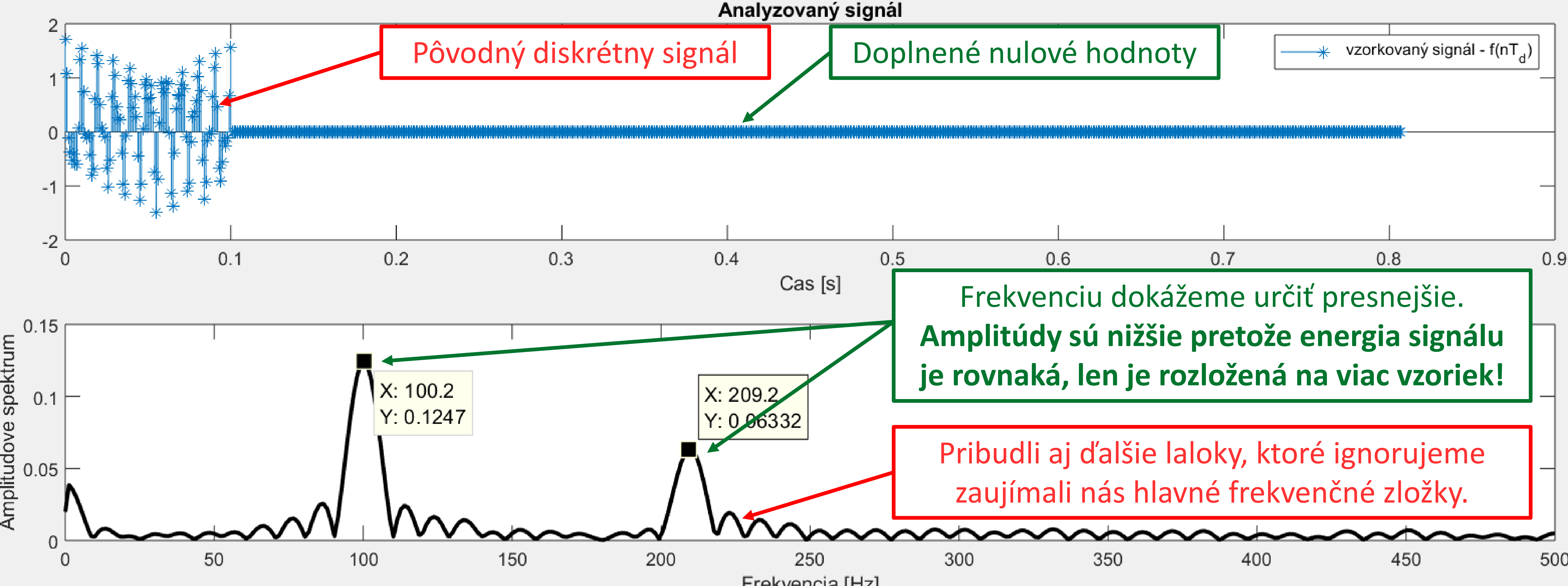
- **Na obrázku je zobrazený takýto diskrétny signál a jeho amplitúdové spektrum (***spojité zobrazenie – lineárna interpolácia***).**



Môžeme si všimnúť, že frekvenciu zložiek signálu nevieme určiť presne. Je to z dôvodu zašumenia a tiež, že analyzovaný signál mal pomerne málo vzoriek (vzhľadom periódu, ktorá je vďaka neceločíselnému pomeru frekvencii 100:209 *pomerne ťažko určiteľná*).

Spektrálna analýza diskrétnych signálov–Praktické ukážky

- **Je dôležité mať na pamäti, že frekvenčné rozlíšenie je dané iba počtom vzoriek analyzovaného signálu.**
- **Presnosť určenia frekvencie však do istej miery vieme zvýšiť pomocou vloženia nulových vzoriek na koniec signálu.**
- **Zvýši sa tak dĺžka signálu čo povedie k presnejšiemu určeniu frekvencie. V praxi často využívané!**



Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

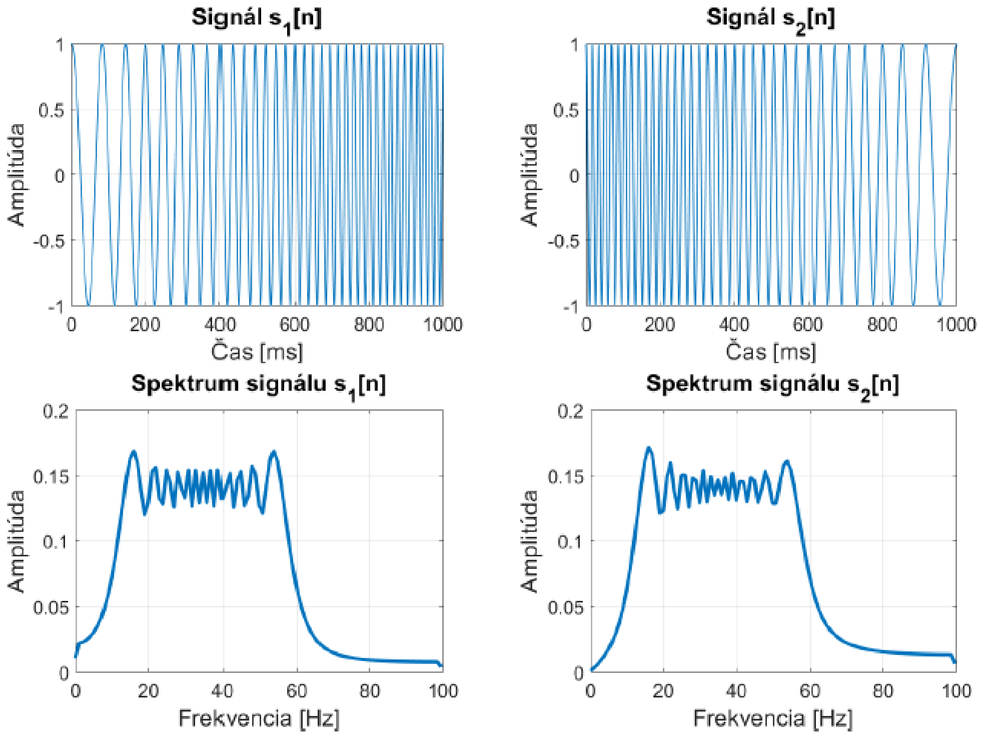
Prednáška č. 7

- Aktualizácia
- Diskrétna Fourierová transformácia a spektrálna analýza diskrétnych signálov
- **Časovo-frekvenčná analýza signálov**

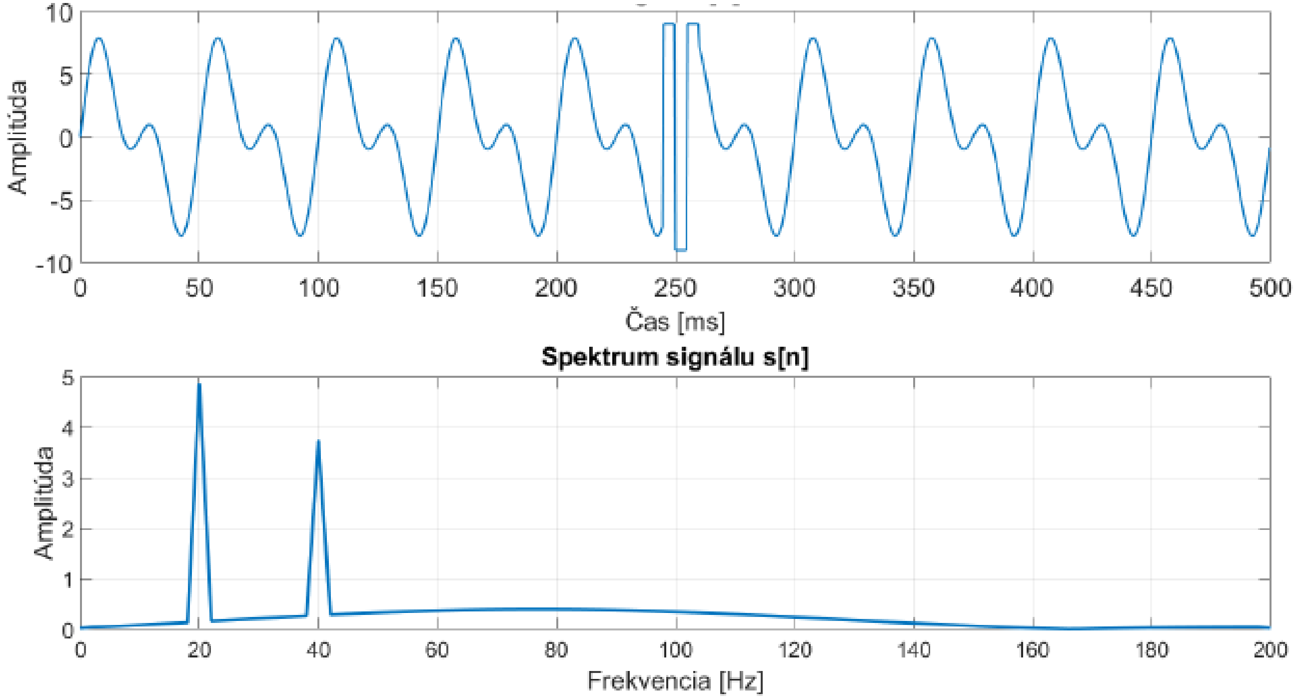
Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Časovo-frekvenčná analýza signálov - Úvod

- Nevýhodou iba frekvenčnej analýzy je to, že poskytuje iba informáciu o frekvenčných zložkách obsiahnutých v celom trvaní signálu.
  - **DFT aplikovaná na signál s dĺžkou 1024 vzoriek bude obsahovať 1024 spektrálnych zložiek, pričom len 512 z nich prináša informáciu...**
  - Spektrum signálu po aplikácii FT neposkytuje informáciu o čase, nemôžeme túto transformáciu použiť pri signáloch, ktoré sa v čase menia.
  - V prípade, že sa v signáloch vyskytne nejaká chyba, je možné nanajvýš usúdiť, že v spektre sa objavujú zložky, ktoré môžu na túto chybu upozorniť. Nie je možné ani len približne určiť v akom časovom okamihu k chybe (poruche) došlo.



$s[n] = 5sin(40\pi t) + 4sin(80\pi t)$ [1]



[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

- V zmysle odstránenia nevýhody uvedenej na predchádzajúcom slajde je možné využiť **Krátkodobú Fourierovú transformáciu**
  - Krátkodobá Fourierova transformácia, tiež nazývaná aj STFT (Short Time Fourier Transform), sa často využíva pri časovo frekvenčnej analýze signálov. Na rozdiel od klasickej FT sa pri tejto transformácii **signál $f(t)$ vynásobí** s **oknovou funkciou (OF)** konštantnej dĺžky a následne sa aplikuje FT na jednotlivé úseky.
  - V oblasti spojitého času je STFT definovaná nasledovne:

$$\boxed{STFT\{f(t)\}(\tau,\omega) = F(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt}$$

Oknová funkcia posunutá do časového okamihu τ resp. m.

  - V diskrétnej časovej oblasti:

$$\boxed{STFT\{s[n]\}(m,\omega) = S(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]w[n-m]e^{-j\omega n}}$$

Analyzovaný signál

  - Oknové funkcie (bližšie prednáška č. 4)
    - **Obdĺžniková OF -** špeciálny STFT typ transformácie nazývanej Gáborova transformácia,
    - **Hammingova alebo Hannova OF -** pre úzkopásmové náhodné signály
    - **Kaiser-Besselova OF -** pre signály s veľmi podobnou frekvenciou, ale rôznou amplitúdou sa používa ktorá maximalizuje koncentráciu energie v hlavnom laloku
    - Podľa aplikácie sú použiteľné aj ďalšie OF
  - **Výber OF priamo ovplyvňuje frekvenčné rozlíšenie výsledku analýzy signálu.**
  - **Spektrum STFT je komplexná funkcia času a frekvencie a pre zobrazenie spektra sa používa spektrogram**

Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

- V zmysle odstránenia nevýhody uvedenej na predchádzajúcom slajde je možné využiť **Krátkodobú Fourierovú transformáciu**
  - Krátkodobá Fourierova transformácia, tiež nazývaná aj STFT (Short Time Fourier Transform), sa často využíva pri časovo frekvenčnej analýze signálov. Na rozdiel od klasickej FT sa pri tejto transformácii **signál $f(t)$ vynásobí** s **oknovou funkciou (OF)** konštantnej dĺžky a následne sa aplikuje FT na jednotlivé úseky.

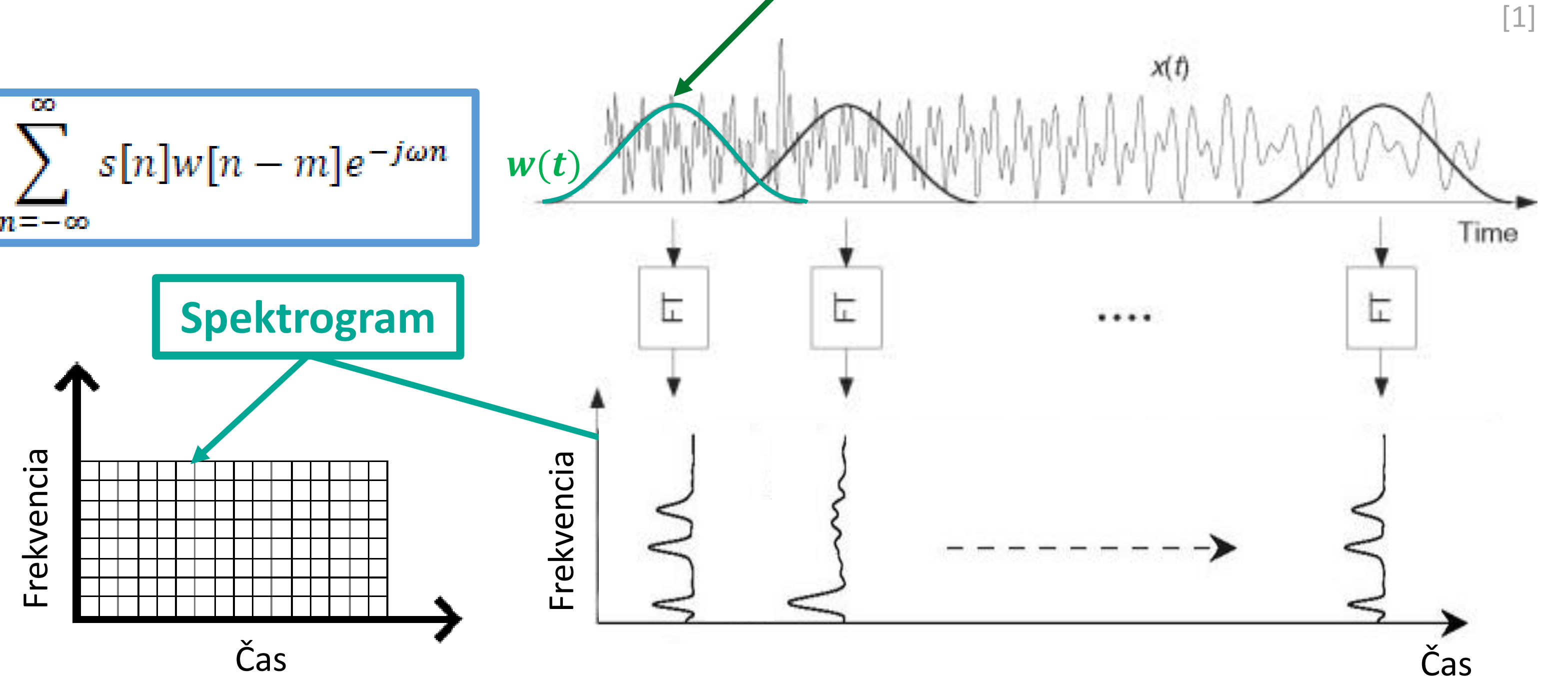
Oknová funkcia posunutá do časového okamihu τ resp. m.

  - **V oblasti spojitého času je STFT definovaná nasledovne:**

$$STFT\{f(t)\}(\tau,\omega) = F(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

  - **V diskrétnej časovej oblasti:**

$$STFT\{s[n]\}(m,\omega) = S(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$



[1] Kehtarnavaz, Nasser. "Digital Signal Processing System Design: LabVIEW-Based Hybrid." (2008).

Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

- V zmysle odstránenia nevýhody uvedenej na predchádzajúcom slajde je možné využiť **Krátkodobú Fourierovú transformáciu**
  - Krátkodobá Fourierova transformácia, tiež nazývaná aj STFT (Short Time Fourier Transform), sa často využíva pri časovo frekvenčnej analýze signálov. Na rozdiel od klasickej FT sa pri tejto transformácii **signál** $f(t)$ **vynásobí** s **oknovou funkciou (OF)** konštantnej dĺžky a následne sa aplikuje FT na jednotlivé úseky.

Oknová funkcia posunutá do časového okamihu τ resp. m.

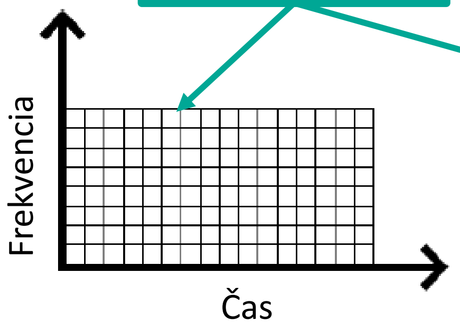
  - **V oblasti spojitého času je STFT definovaná nasledovne:**

$$STFT\{f(t)\}(\tau,\omega) = F(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

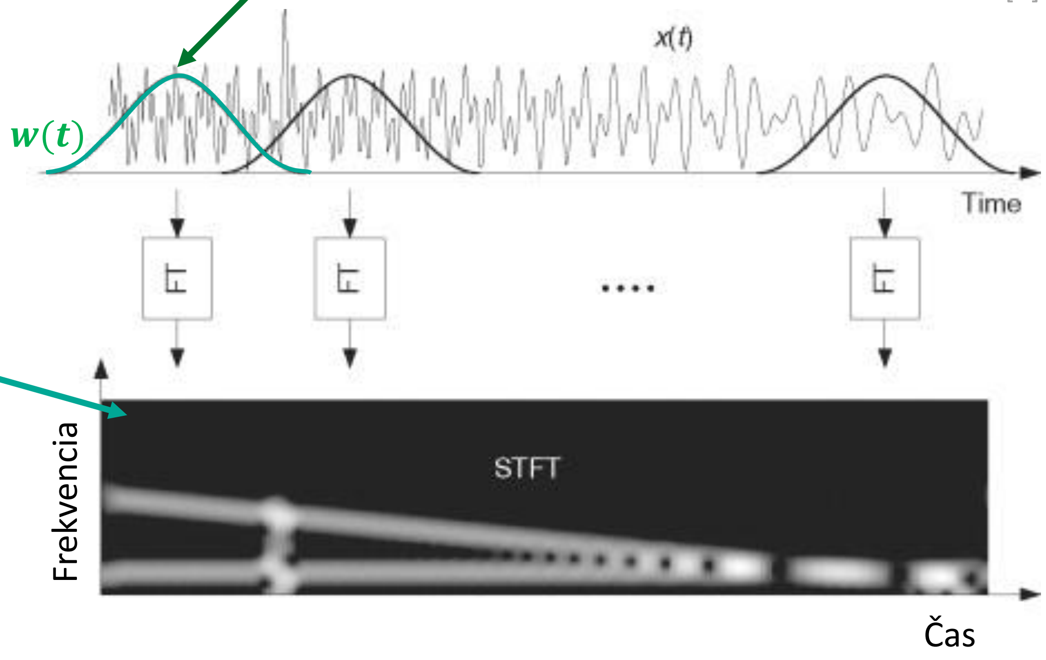
  - **V diskrétnej časovej oblasti:**

$$STFT\{s[n]\}(m,\omega) = S(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

Spektrogram



[1]



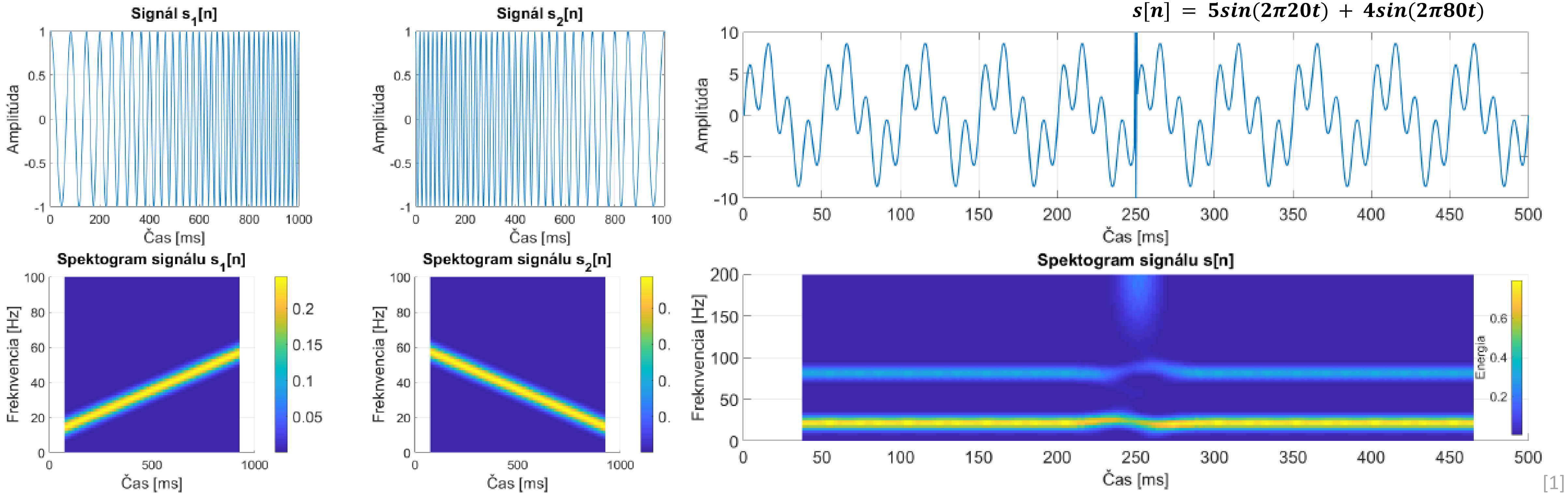
[1] Kehtarnavaz, Nasser. "Digital Signal Processing System Design: LabVIEW-Based Hybrid." (2008).

Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

$$STFT\{f(t)\}(\tau,\omega) = F(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

$$STFT\{s[n]\}(m,\omega) = S(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

- **STFT spektrum má pevné rozlíšenie.** Táto vlastnosť nepriamo súvisí s Heisenbergovým princípom neurčitosti. Čím je väčšie rozlíšenie vo frekvenčnom pásme, tým je menšie rozlíšenie v časovom pásme a naopak
- **Pre STFT taktiež existuje inverzná funkcia, pomocou ktorej je možné rekonštruovať signál f(t) zo spektogramu.**



[1]

[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

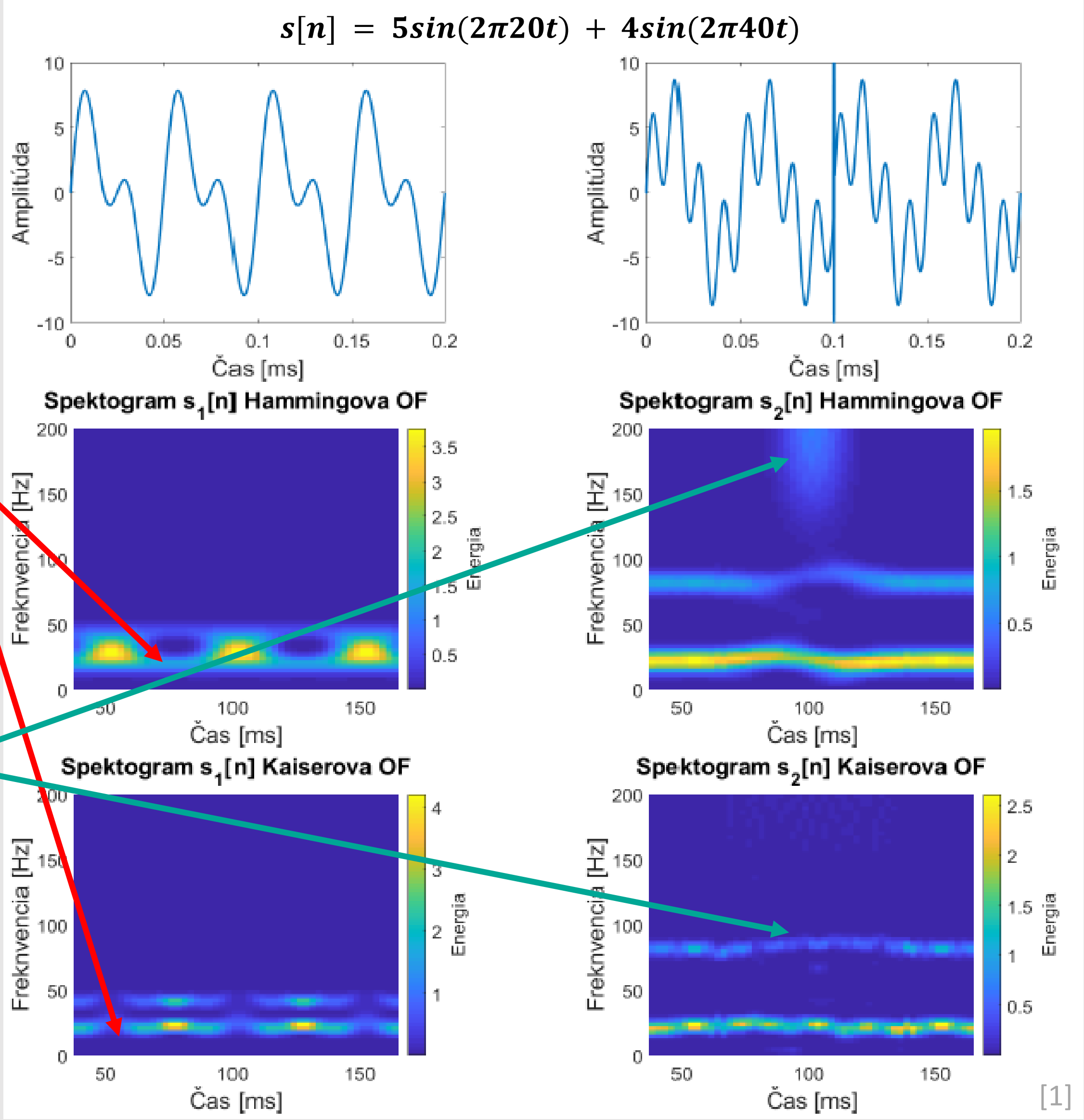
Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

- **Už bolo uvedené, že výber OF priamo ovplyvňuje frekvenčné rozlíšenie výsledku analýzy signálu.**

Pri použití Hammingovej OF sa harmonické zložky (20 a 40 Hz) **zlievajú do jednej**.
Pri použití Kaiserovej OF je možné rozoznať každú jednu harmonickú zložku

Kaiserová OF je lepšie pre spracovanie signálov s podobnými frekvenciami

Kaiserova OF nie je dobrá pre zobrazovanie nespojitosti v signáli. Nespojitosť je možné pozorovať na spektrograme s Hammingovou OF.

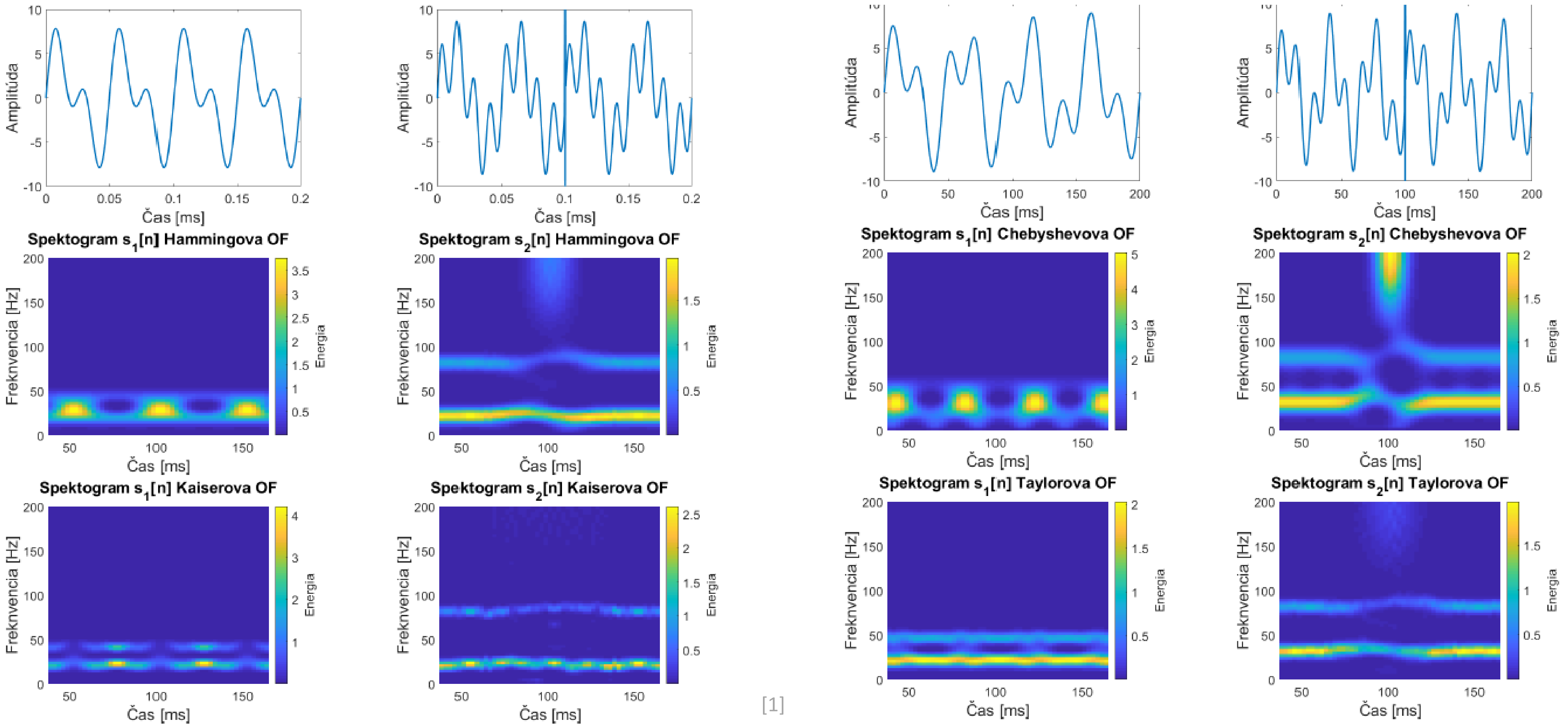


[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Časovo-frekvenčná analýza signálov - STFT

- **Už bolo uvedené, že výber OF priamo ovplyvňuje frekvenčné rozlíšenie výsledku analýzy signálu.**

$$s[n] = 5sin(2\pi 20t) + 4sin(2\pi 40t)$$



[1]

[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Časovo-frekvenčná analýza signálov – GT

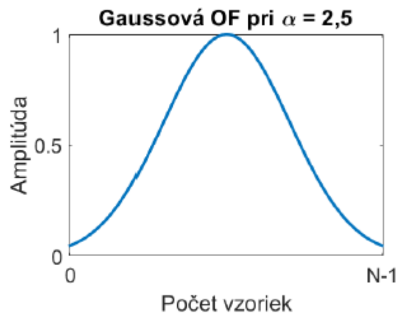
- **Gáborová transformácia (GT) je špeciálnym prípadom STFT, ktorá využíva Gaussovú OF.**
  - Predstavil ju Dennis Gabor v roku 1946 v článku „Theory of communication".
  - Uviedol, že optimálna reprezentácia signálu je taká, ktorá kombinuje informáciu o frekvencii a aj lokácii.
  - Uviedol súbor základných funkcií pozostávajúcich z Gaussových OF, ktoré sú modulované komplexnými exponentmi. Neskôr sa tento súbor Gaussových oknových funkcií stal známym ako Gáborove elementárne funkcie.

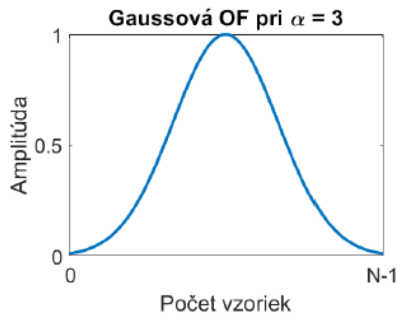
- Gaussova OF je definovaná vzťahom:

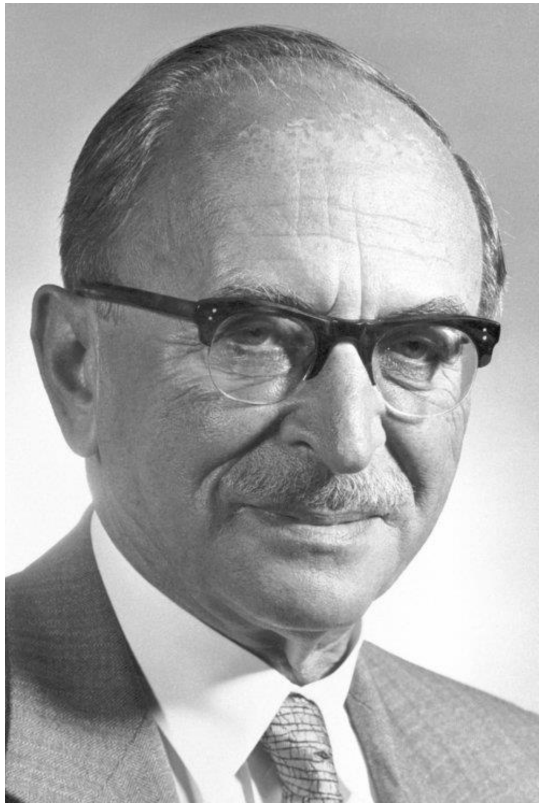
$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

σ^2 je rozptyl Gaussovej OF. Niekedy sa na miesto parametra rozptylu uvádza šírkový faktor Gaussovej OF α.

$$\sigma = \frac{N-1}{2\alpha}$$







Denis Gábor (5.6.1900 – 8.2.1979)
Laureát Nobelovej ceny za fyziku (1971)

[1]

[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Časovo-frekvenčná analýza signálov – GT

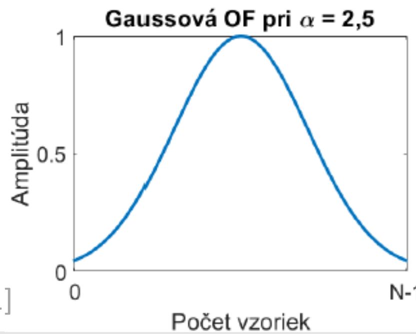
- **Gáborová transformácia (GT) je špeciálnym prípadom STFT, ktorá využíva Gaussovú OF.**
    - Predstavil ju Dennis Gabor v roku 1946 v článku „Theory of communication“.
    - Uviedol, že optimálna reprezentácia signálu je taká, ktorá kombinuje informáciu o frekvencii a aj lokácii.
    - Uviedol súbor základných funkcií pozostávajúcich z Gaussových OF, ktoré sú modulované komplexnými exponentmi. Neskôr sa tento súbor Gaussových oknových funkcií stal známym ako Gáborove elementárne funkcie.

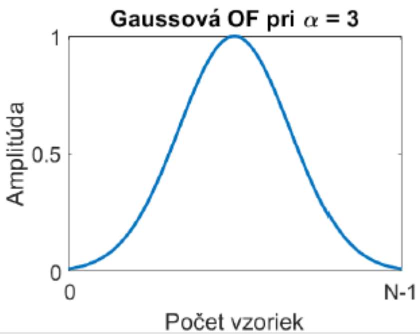
- Gaussova OF je definovaná vzťahom:

σ^2 je rozptyl Gaussovej OF. Niekedy sa na miesto parametra rozptylu uvádza šírkový faktor Gaussovej OF α.

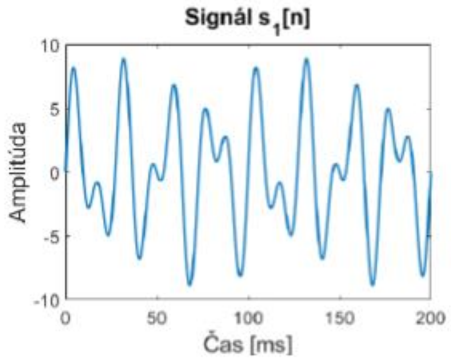
$$\sigma = \frac{N-1}{2\alpha}$$

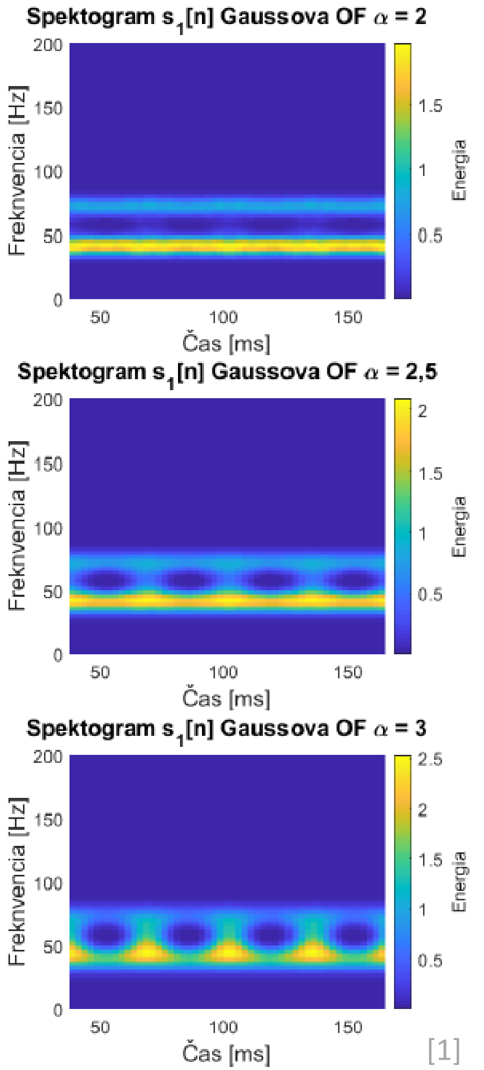
$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$





[1]





[1]

[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Časovo-frekvenčná analýza signálov – GT

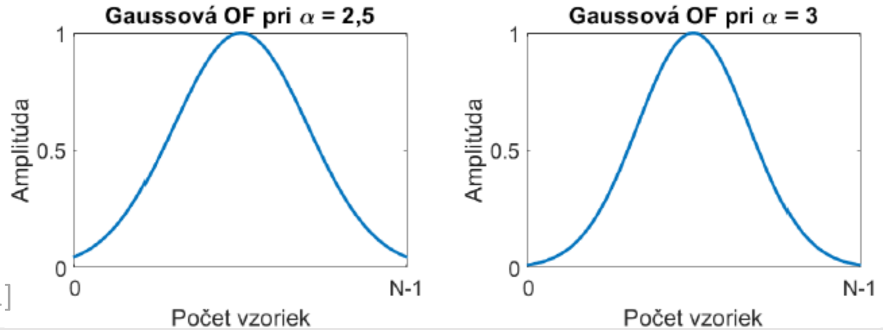
- **Gáborová transformácia (GT) je špeciálnym prípadom STFT, ktorá využíva Gaussovú OF.**
  - Predstavil ju Dennis Gabor v roku 1946 v článku „Theory of communication“.
  - Uviedol, že optimálna reprezentácia signálu je taká, ktorá kombinuje informáciu o frekvencii a aj lokácii.
  - Uviedol súbor základných funkcií pozostávajúcich z Gaussových OF, ktoré sú modulované komplexnými exponentmi. Neskôr sa tento súbor Gaussových oknových funkcií stal známym ako Gáborove elementárne funkcie.

- Gaussova OF je definovaná vzťahom:

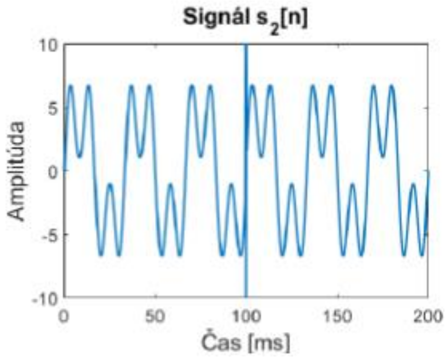
σ^2 je rozptyl Gaussovej OF. Niekedy sa na miesto parametra rozptylu uvádza šírkový faktor Gaussovej OF α.

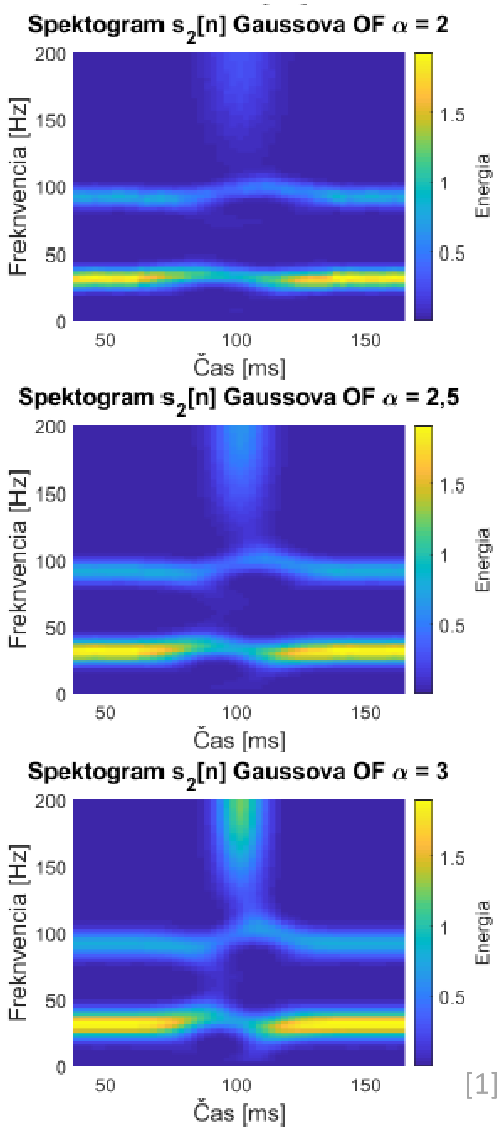
$$\sigma = \frac{N-1}{2\alpha}$$

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$



[1]

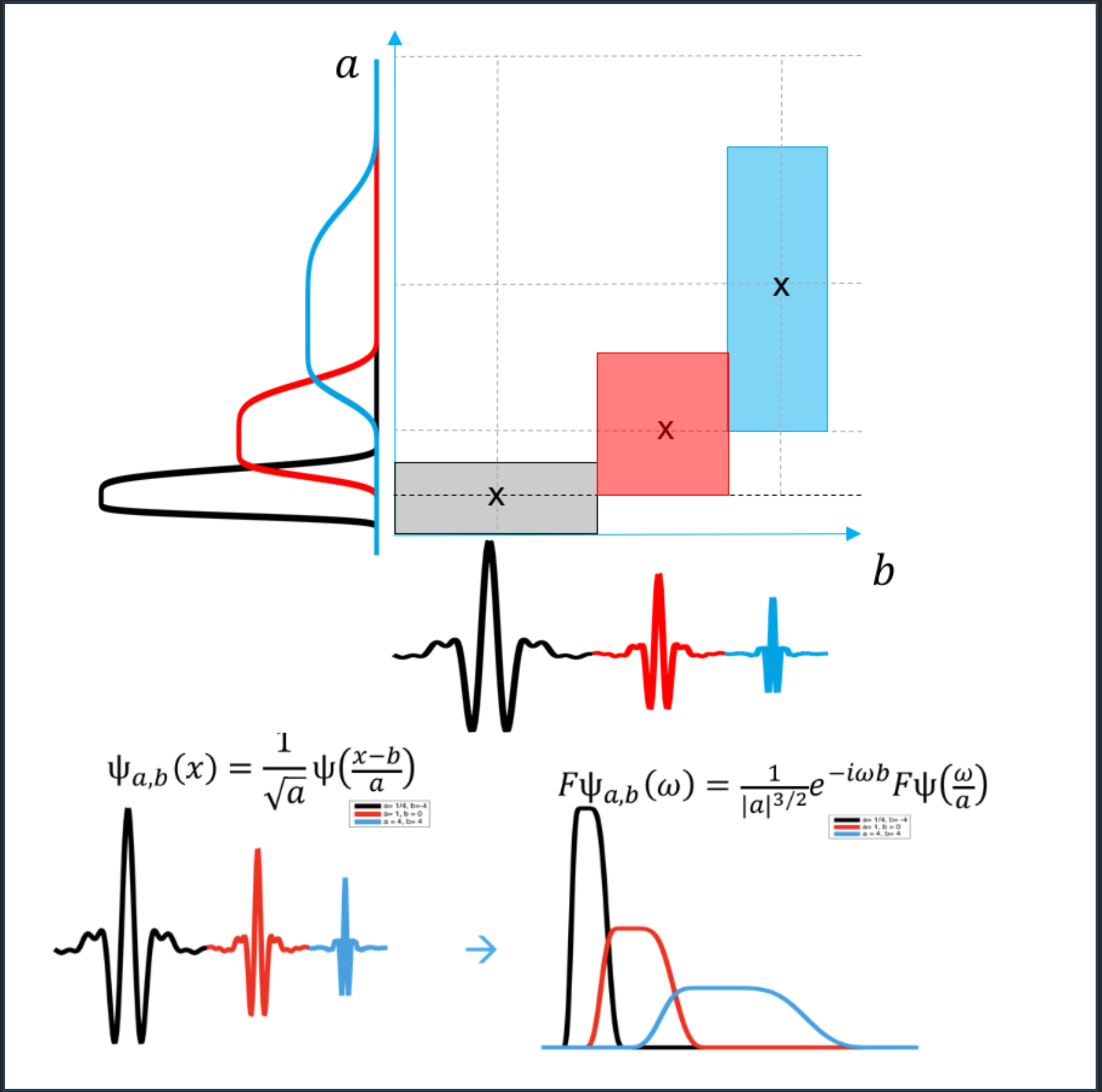




[1]

[1] Kromka, J. "Od Fouriera k waveletom" Bakalárska práca (2019).

Ďakujem za pozornosť!



Nabudúce:

- Spojitá waveletová transformácia (dokončenie)
- Diskrétna waveletová transformácia
- Lifting implementácia DWT
- Niektoré aplikácie DWT