Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 6

- **Aktualizácia**
- Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)
- MKDS so stromovou štruktúrou
- Dvojkanálový diskrétny systém
- Polyfázová reprezentácia MKDS

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Aktualizácia

Čo je to decimačný faktor?

Aktualizácia

Prečo sa pred decimátor zapája DP filter?

Aktualizácia

Čo je to interpolácia?

Aktualizácia

Aký je rozdiel medzi rozšírením spektra a vytváraním kópií?

Aktualizácia

Čo znamená „hrebeňový charakter" frekvenčných charakteristík?

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 6

- Aktualizácia
- **Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)**
- MKDS so stromovou štruktúrou
- Dvojkanálový diskrétny systém
- Polyfázová reprezentácia MKDS

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS) - Motivácia

MKDS je možné využiť napríklad v týchto prípadoch:

- oddelené spracovanie rôznych frekvencií signálu bez použitia FFT
- odstránenie úzkopásmového šumu v signáli
- zníženie výpočtovej náročnosti algoritmu jeho aplikácií v subpásmach
- odlišná veľkosť kompresie pro rôzne frekvenčné zložky signálu
- filtrácia a zvýrazňovanie rôznych zložiek signálu

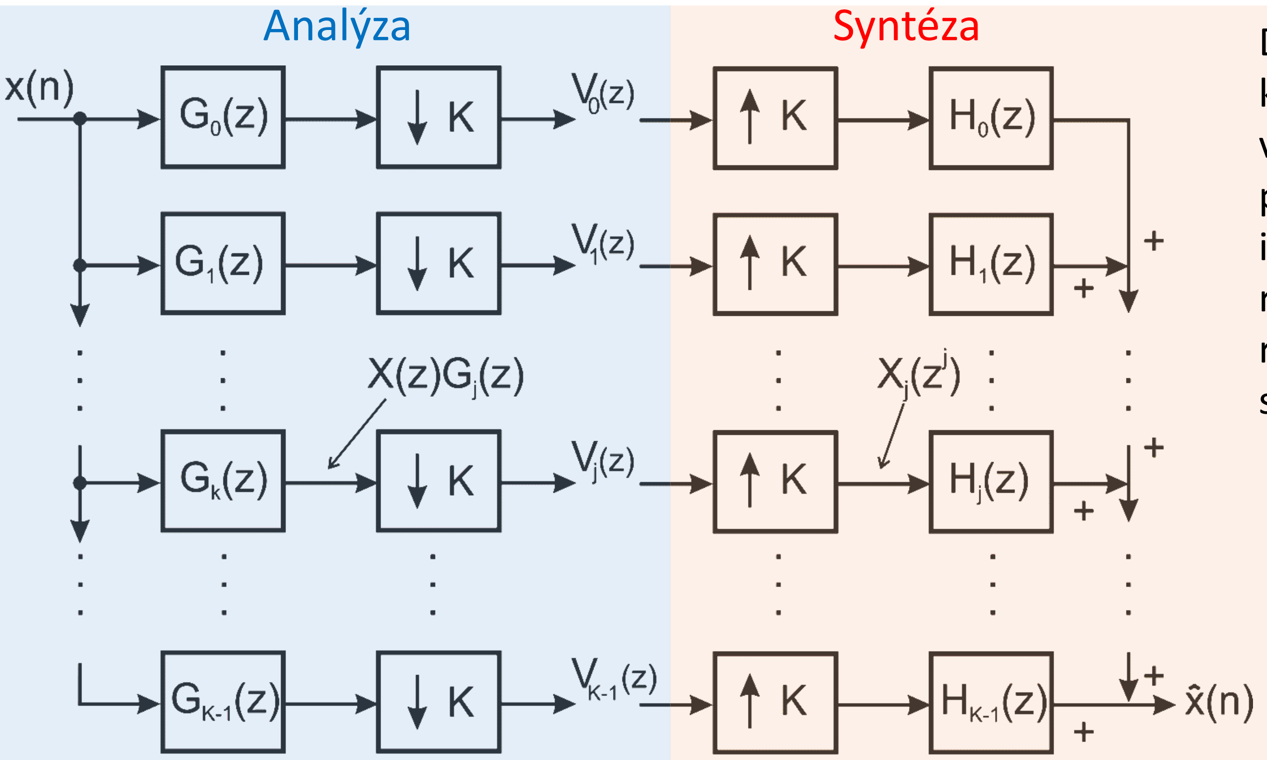
Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)

Bloková schéma MKDS - pozostáva z časti analýzy a syntézy.

- Analýza vstupného signálu sa vykonáva pomocou filtrov analýzy s prenosovými funkciami $G_k(z)$
- Syntéza výstupného signálu je vykonaná pomocou filtrov syntézy (rekonštrukčné filtre) s prenosovými funkciami $H_k(z)$

Filtre analýzy rozdelia frekvenčné pásmo vstup. diskrétneho signálu $x(n)$ do K subpásiem.

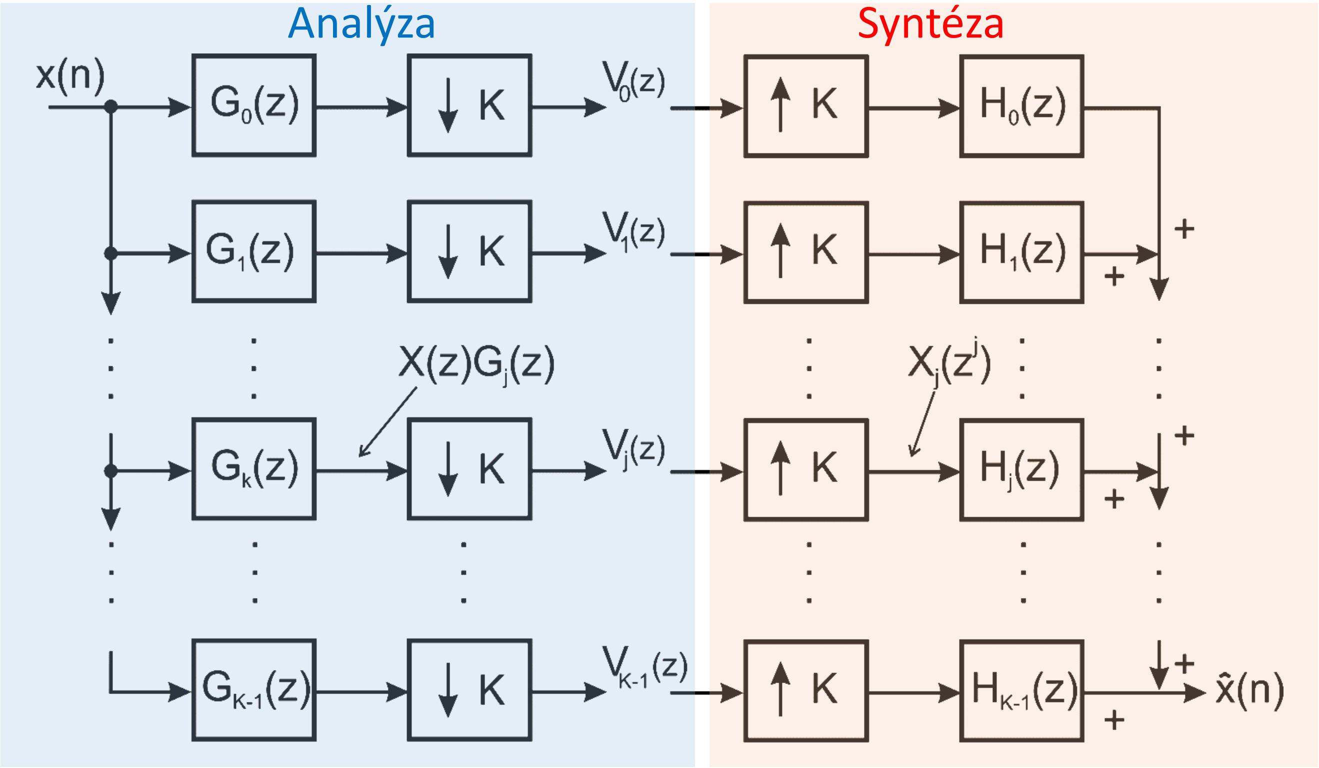
V decimátoroch je potom každý subpásmový signál decimovaný s celočíselným faktorom K.



Decimované signály jednotlivých kanálov sa následne interpolujú v interpolátoroch s faktorom K a pomocou filtrov syntézy sa interpolované signály rekombinujú do výstupného rekonštruovaného (obnoveného) signálu $\hat{x}(n)$

Tento MKDS **sa tiež nazýva** maximálne decimovaný systém, **pretože decimačný faktor D je rovný počtu pásiem, resp. kanálov K.**

Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)



Nech T(z) je ***požadovaná prenosová funkcia*** MKDS premennej „z“ .

Aby MKDS bola bez aliasingu, potom musí pre danú množinu K filtrov analýzy s prenosovými funkciami $G_j(z)$ a K filtrov syntézy s prenosovými funkciami $H_j(z)$ platiť nasledové:

$$\boxed{T(z) = \frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} G_j(z)H_j(z)}$$

Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)

- Vo všeobecnosti prenosová funkcia T(z) môže spôsobiť amplitúdové a fázové skreslenie.
- Pre eliminovanie týchto skreslení je nutné, aby prenosová funkcia T(z) **mala konštantnú amplitúdovú a lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku**, tj.

$$\boxed{T(z) = cz^{-n_0}}$$

(c- konštanta, n_0- kladné celé číslo)

tejto prenosovej funkcii potom v časovej oblasti zodpovedá vzťah medzi vstupným a výstupným signálom:

$$\boxed{\hat{x}(n) = cx(n - n_0)}$$

z ktorého vyplýva, že takýto MKDS predstavuje lineárny oneskorovací systém *(výstupný signál je zhodný so vstup. signálom – len je oneskorený a môže sa líšiť veľkosťou - c).*

MKDS, ktorý potláča aliasingové, amplitúdové a fázové skreslenia a vyhovuje vyššie uvedeným rovniciam sa nazýva **MKDS s dokonalou (úplnou) rekonštrukciou (DR)**.

Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)

- **Celý systém rozdelenia signálu do subpásiem však pracuje v časovej oblasti**, tzn. konkrétne s diskrétnymi vzorkami signálu, **bez použitia prevodu do frekvenčnej oblasti** napríklad metódou FFT (Fast Fourier Transformation)!
- To sa dá využiť aj v spomínanej FFT, pretože zatiaľ čo pre celý signál by musela byť použitá napríklad 1024 vzorková FFT, v jednotlivých subpásmach banky filtrov stačí použiť napríklad 256 vzorkovú FFT v jednom pásme a v inom napr. iba 128 vzorkovú FFT podľa potreby, atď.
- Tým sa zjednoduší a zrýchli výpočet algoritmu v reálnom čase, pretože výpočtová náročnosť banky filtrov v reálnom čase je obvykle nižšia než FFT pre spracovanie bez subpásiem.
- Ešte markantnejšie zníženie počtu operácii je pri maticových výpočtoch so vstupným signálom. Zatiaľ čo **pri práci s celým signálom by bolo nutné** prevádzať maticové operácie (násobenie, sčítanie apod.), po rozdelení signálu do subpásiem je možné napr. použiť iba implementačné jednoduché skalárne operácie.

Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)

- Rozlišujeme banky filtrov pre MKDS s **dokonalou rekonštrukciou (DR) alebo pseudo dokonalou rekonštrukciou (PDR)**.
- **Návrh banky pre MKDS s DR je obťažný**, pretože požaduje samostatný výpočet všetkých, vo všeobecnosti rôznych prenosových funkcií filtrov analýzy a syntézy.
- Na druhej strane jej návrh pre **MKDS s PDR sa značne zjednodušuje**, lebo tieto **prenosové funkcie môžu byť vypočítané z jedinej prenosovej funkcie prototypového dolnopriepustného (DP) filtra.**
- Toto zjednodušenie jej návrhu spôsobí, že **tri druhy skreslení**, t.j. **aliasingové, amplitúdové a fázové** v MKDS s PDR sa eliminujú len približne (ich hodnoty z praktického hľadiska môžu byť veľmi malé, preto možno hovoriť o „skoro dokonalej“ rekonštrukcii.) Vtedy prenosové funkcie filtrov v susedných kanáloch MKDS s PDR musia byť približne výkonovo komplementárne.

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 6

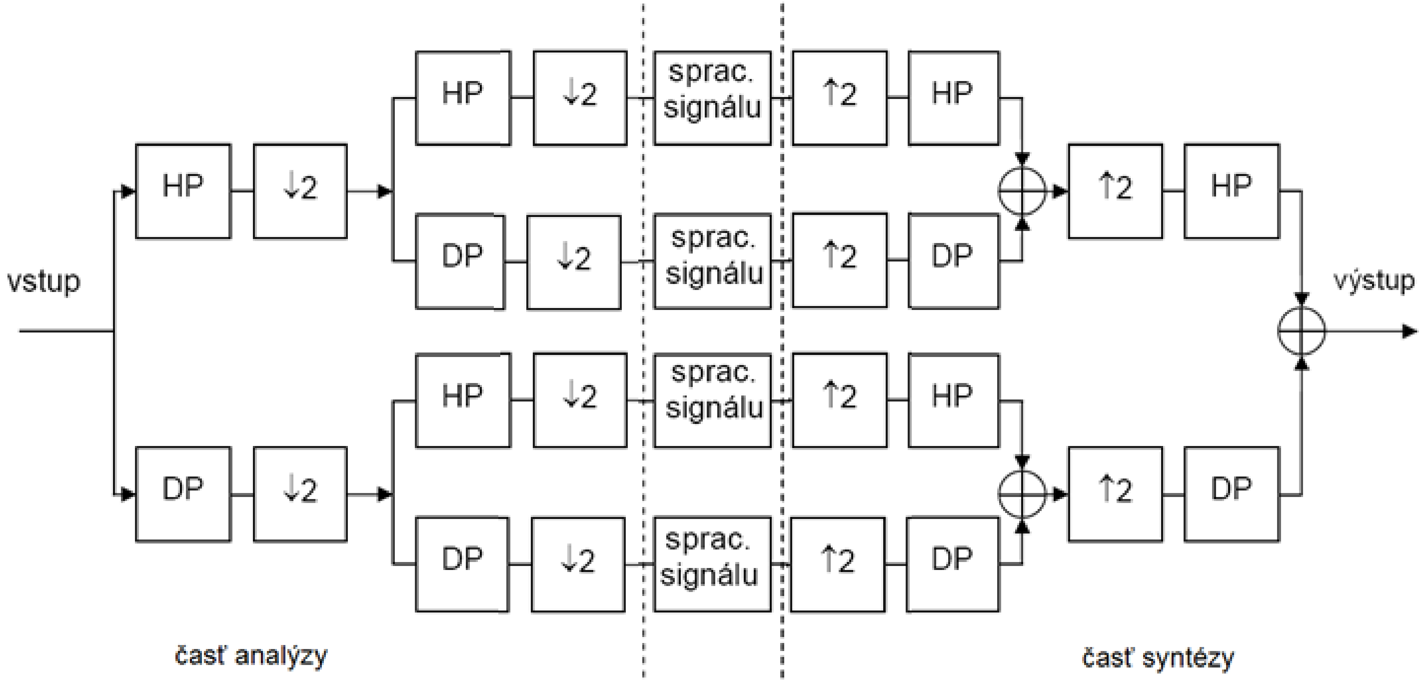
- Aktualizácia
- Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)
- MKDS so stromovou štruktúrou
- Dvojkanálový diskrétny systém
- Polyfázová reprezentácia MKDS

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

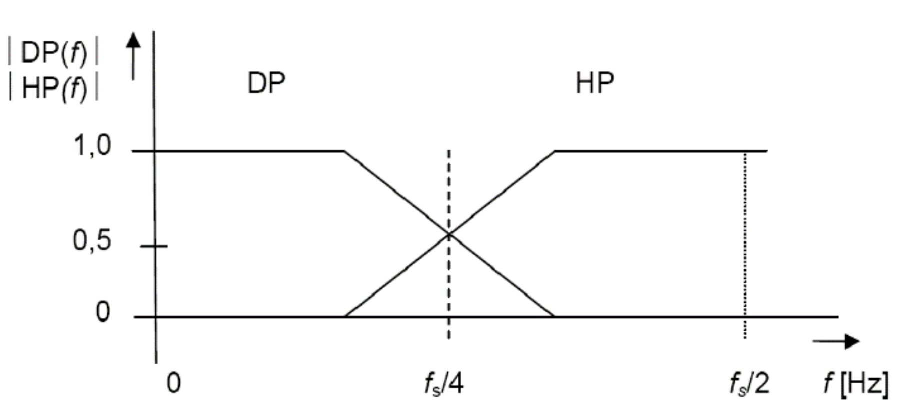
MKDS so stromovou štruktúrou

Keď počet kanálov K je mocninou dvoch môžeme získať mnohokanálovú stromovú štruktúru **opakovaným použitím 2KDS,** ako to vidno na obr. pre **K=4**.

Ak tento 2KDS má **vlastnosť dokonalej rekonštrukcie**, potom to bude platiť aj všeobecne pre K- kanálovú stromovú štruktúru.

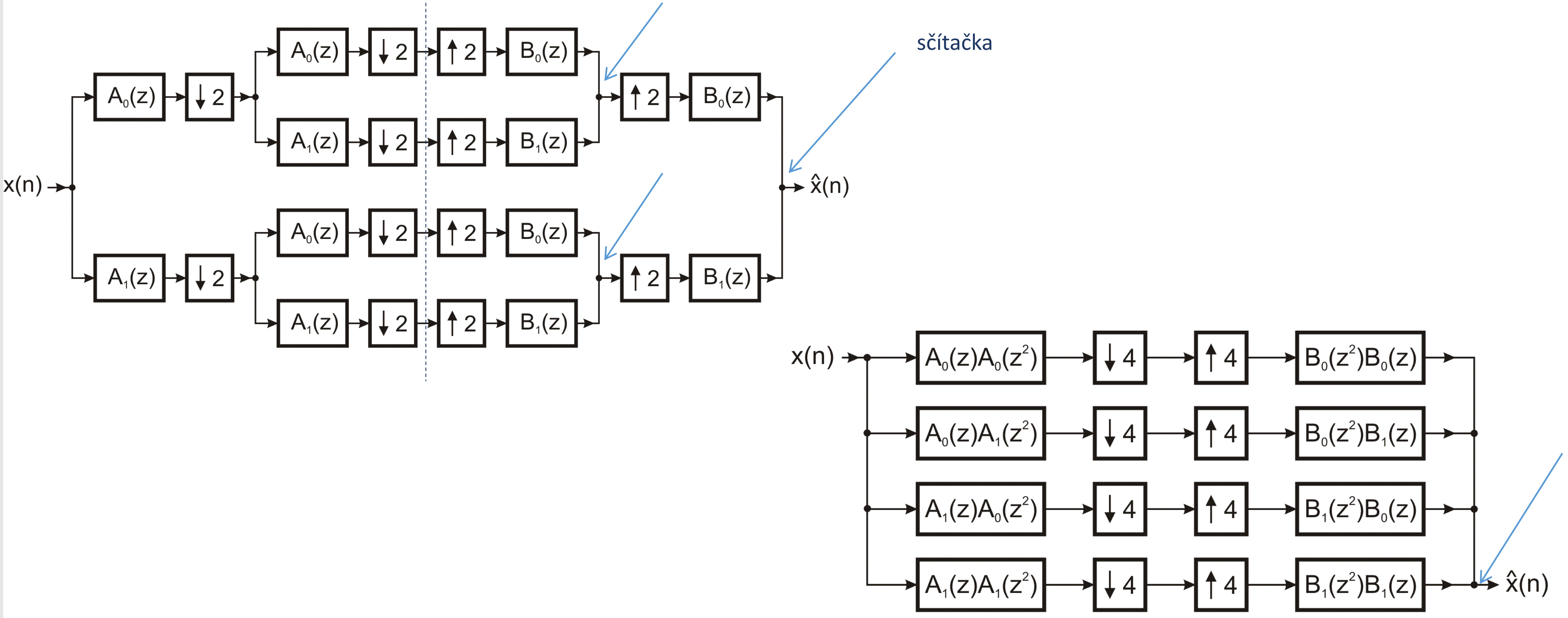


V banke filtrov sa používa decimačný koeficient 2, preto medzná frekvencia FIR filtra musi byť $fs/4$.



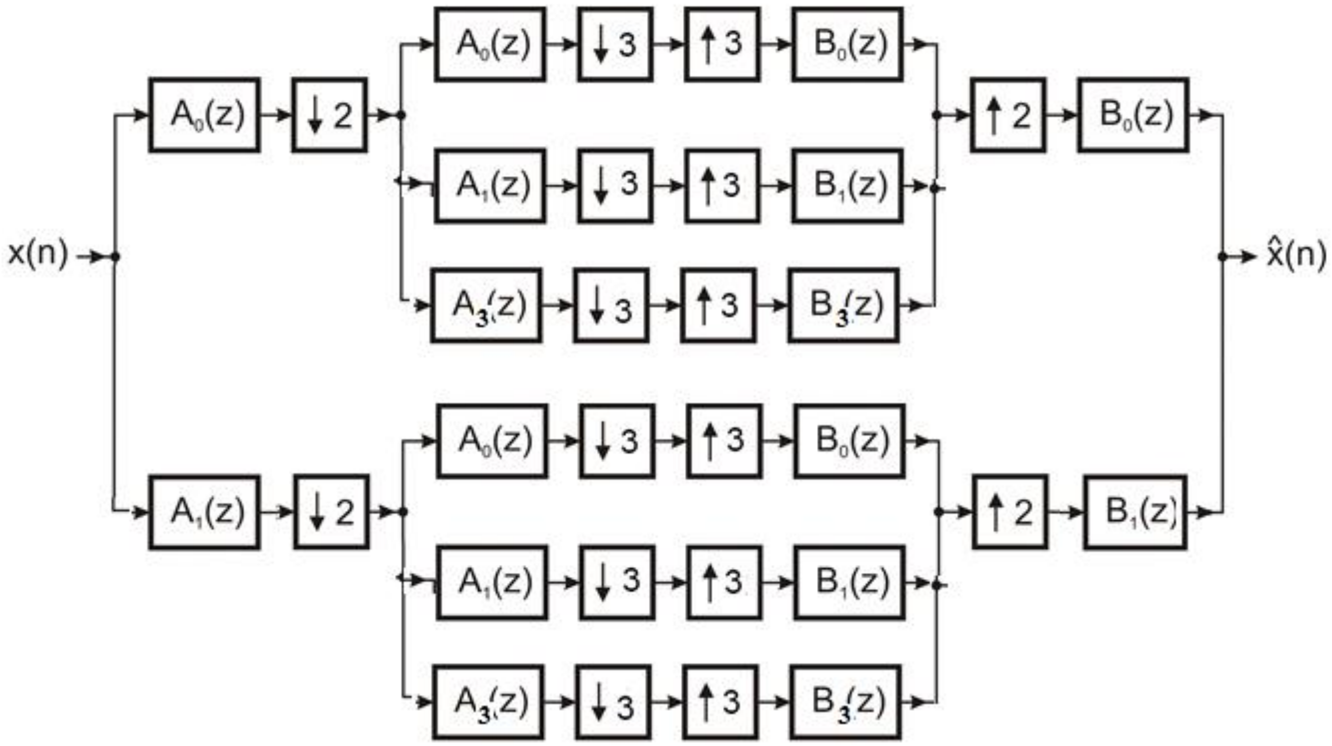
MKDS so stromovou štruktúrou

Stromovú štruktúru je možné transformovať na paralelnú. Napríklad stromovej 4KDS zodpovedá paralelná štruktúra 4KDS.



MKDS so stromovou štruktúrou

Je možné vytvárať aj MKDS, ktorých počet kanálov nie mocninou 2. Napr. môžeme vytvoriť **6-kanálovú stromovú štruktúru** kombináciou 2KDS a 3KDS



MKDS so stromovou štruktúrou

Hlavnou výhodou stromových štruktúr je, že výsledky pre 2KDS môžu byť použité pre viacúrovňové MKDS so stromovou štruktúrou.

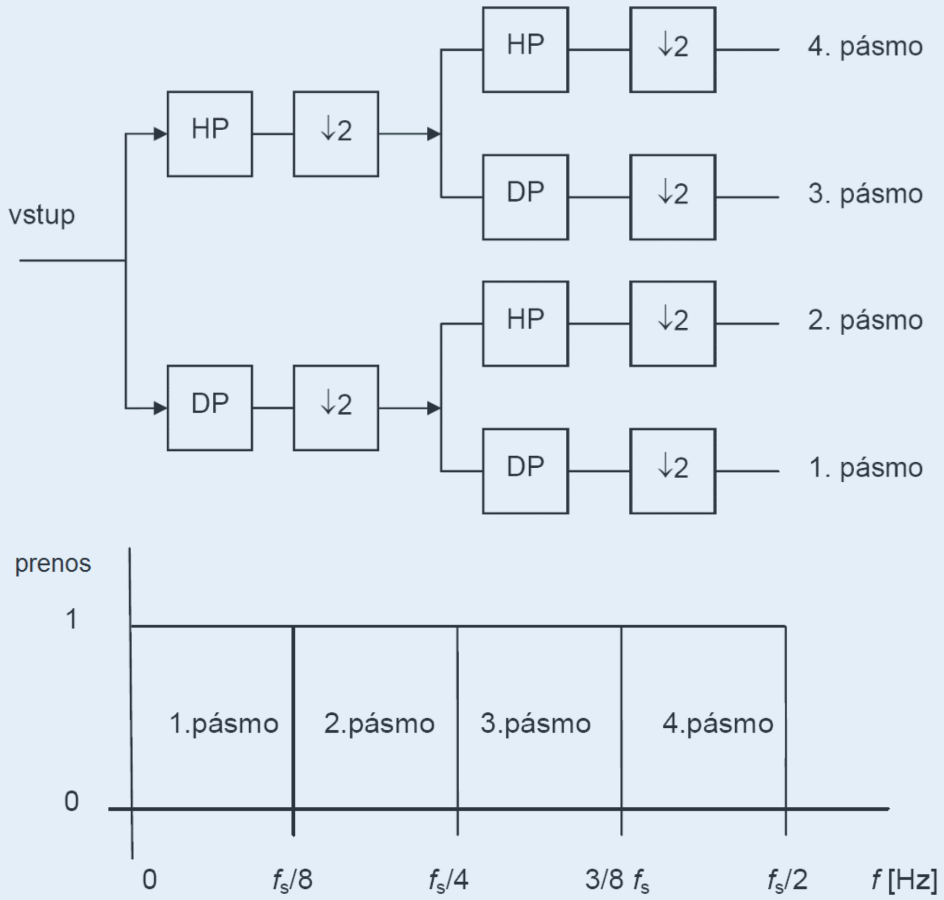
Nevýhodou je relatívne **vysoká výpočtová zložitosť**, ktorá je určovaná celkovým počtom operácií filtrov, **veľké množstvo potrebnej pamäti** a **väčšie skupinové oneskorenie** celkovej stromovej štruktúry v porovnaní s paralelnou štruktúrou.

Vo všeobecnosti MKDS sú navrhované tak, že v prvom kanáli sa spracováva nízkofrekvenčná zložka a v ostatných kanáloch vysokofrekvenčné zložky vstupného diskrétneho signálu. Z tohto vyplýva, že banka filtrov analýzy alebo syntézy má v prvom kanáli DP filter a v tých ostatných pásmové alebo HP filtre (viď oktávová banka filtrov na str.12).

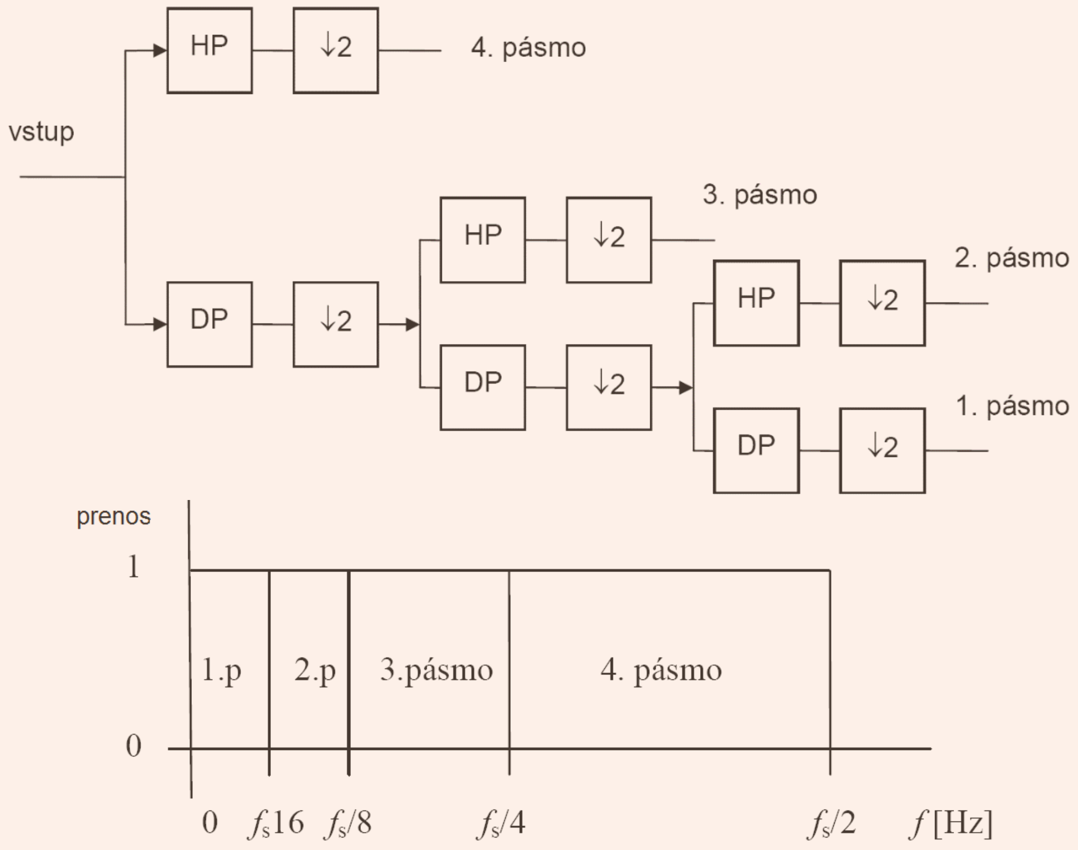
MKDS so stromovou štruktúrou – banky filtrov

Poznáme dva spôsoby zapájania viacúrovňovej stromovej štruktúry:

Lineárna banka filtrov (úplný rozklad) – frekvenčné pásmo signálu je rozdelené **na rovnaké veľké subpásma**.



Oktávová banka filtrov (dyadický rozklad) – frekvenčné pásmo signálu je rozdelené oktávovo **na nerovnaké veľké subpásma**.



Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 6

- Aktualizácia
- Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)
- MKDS so stromovou štruktúrou
- **Dvojkanálový diskrétny systém**
- Polyfázová reprezentácia MKDS

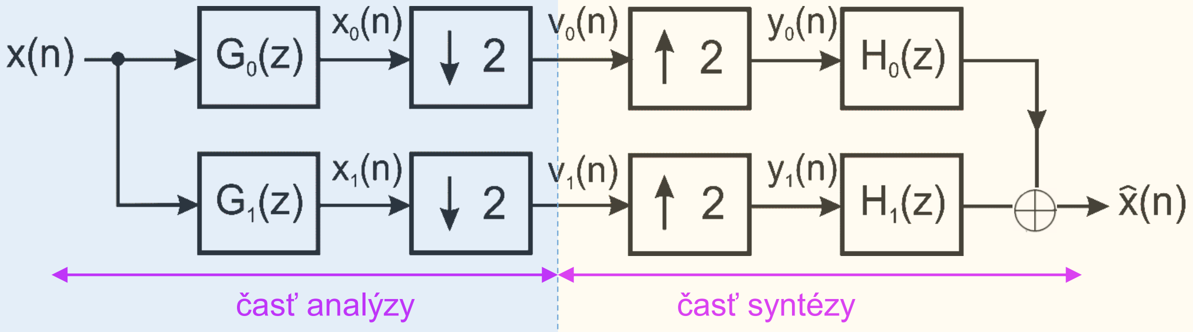
Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Dvojkanálový diskrétny systém – Prenos 2KDS

2KDS - **zrkadlova banka kvadratúrnych filtrov (QMF)**

Rozkladovú časť s dvoma filtrami (**filtre analýzy**) – vstupný signál sa rozdelí na signál, ktorý obsahuje iba nízke frekvencie a na signál, ktorý obsahuje iba vysoké frekvencie, a zníži sa ich vzorkovacia frekvencia na polovicu (decimátormi)

Signály z rozkladovej časti v dvoch kanáloch vstupujú do **rekonštrukčnej časti** schémy (**filtre syntézy**)
Vzorkovacia frekvencia sa pomocou decimácie zvýši na pôvodnú hodnotu.



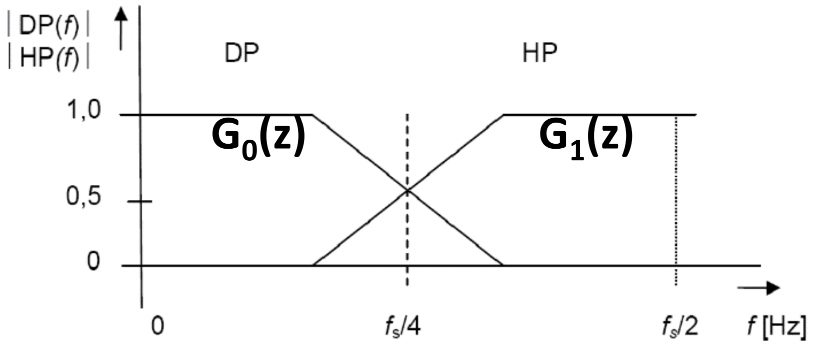
Banka kvadratúrnych zrkadlových filtrov predstavuje **dvojicu filtrov** (faktor K=2) so vzájomne **zrkadlovými prenosovými funkciami $G_0(z)$ a $G_1(z)$** vzhľadom na kruhovú frekvenciu $\omega = \pi/2$ (teda $f_s/4$) v časti analýzy

- Pre dvojkanálovú diskrétnu sústavu s pseudodokonalou rekonštrukciou budú prenosové funkcie filtrov **analýzy** dané vzťahom:

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

- Prenosové funkcie filtrov **syntézy** sa vzhľadom na potlačenie aliasingového skreslenia vypočítajú takto:

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)} \quad \boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Dvojkanálový diskrétny systém – Prenos 2KDS

2KDS - **zrkadlova banka kvadratúrnych filtrov (QMF)**

Dá sa odvodiť, že uvedený 2-kanálový diskrétny systém sa stáva lineárnym časovo invariantným systémom s prenosovou funkciou.

$$\boxed{T(z) = \frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)}{2} = \frac{G_0^2(z) - G_0^2(-z)}{2}}$$

V prípade, že $T(z) = cz^{-n_0}$ bude takýto systém **vykazovať dokonalú rekonštrukciu signálu** na jej výstupe.

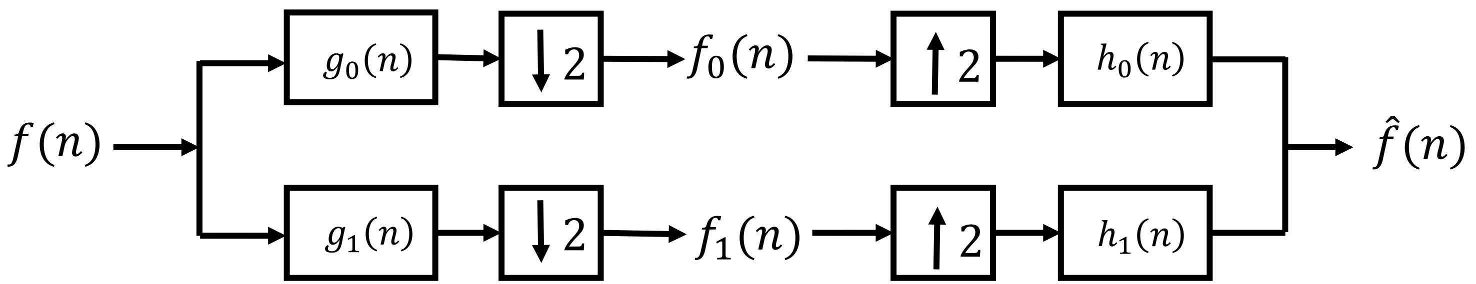
$T(z)$ bude mať lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku vtedy, ak $G_0(z)$ bude mať lineárnu fázu. Týmto po odstránení aliasingového skreslenia sa odstráni aj fázové skreslenie, avšak **stále ostáva amplitúdové skreslenie**.

- *V praxi je však možné systematicky minimalizovať toto amplitúdové skreslenie. Presnejšie vyjadrené - je potrebné optimalizovať koeficienty prenosovej funkcie $G_0(z)$ tak, aby amplitúdová frekvenčná charakteristika $|T(e^{j\omega})|$ bola "plochá" tak, ako je to len možné, pričom sa súčasne minimalizuje energia v nepriepustnom pásme prenosovej funkcie $G_0(z)$.*

2KDS - QMF – príklad

- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

2KDS - QMF – príklad

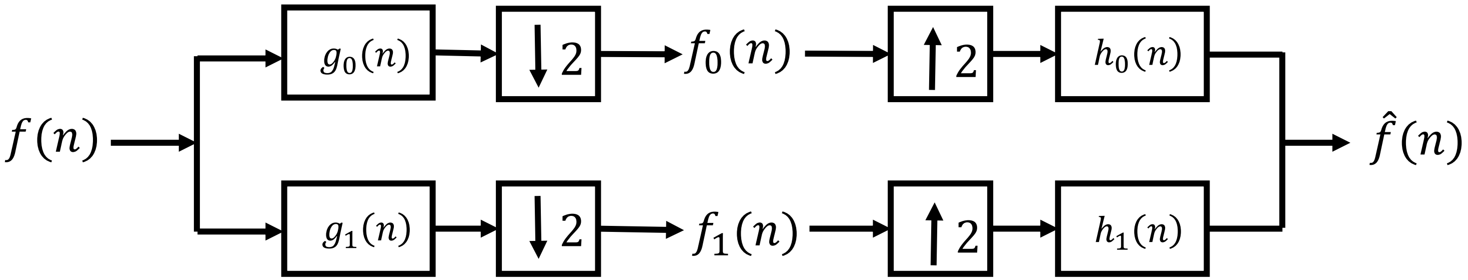
- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)}$$

$$\boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

2KDS - QMF – príklad

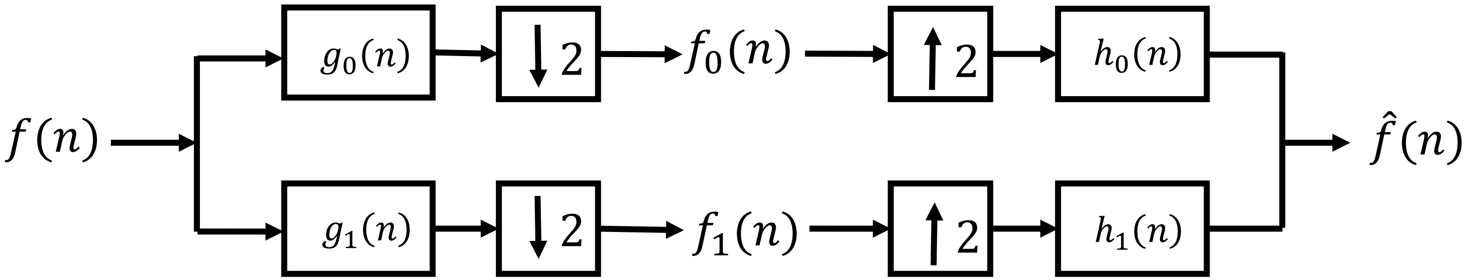
- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)}$$

$$\boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

$$\boldsymbol{g_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right] \xrightarrow{z} G_0(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right]$$

$$G_1(z) = G_0(-z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1z)^{-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{g_1(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

2KDS - QMF – príklad

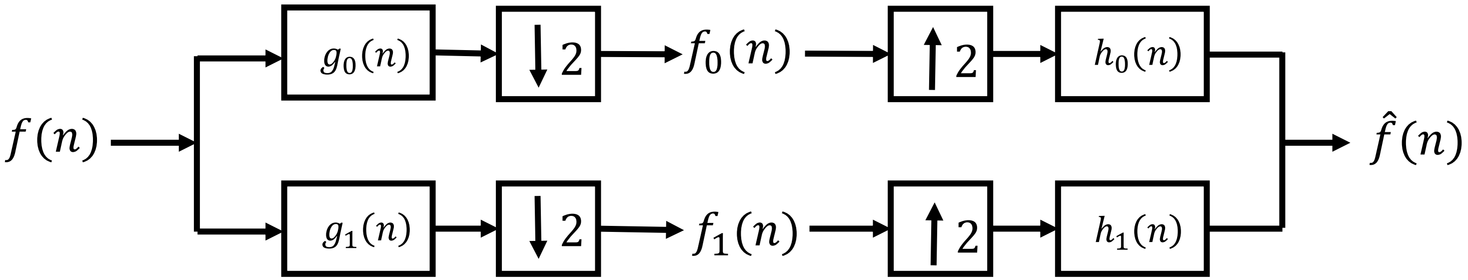
- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)}$$

$$\boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

$$\boldsymbol{g_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right] \xrightarrow{z} G_0(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right]$$

$$G_1(z) = G_0(-z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} (-1z)^{-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{g_1(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

Získali sme filtre analýzy

2KDS - QMF – príklad

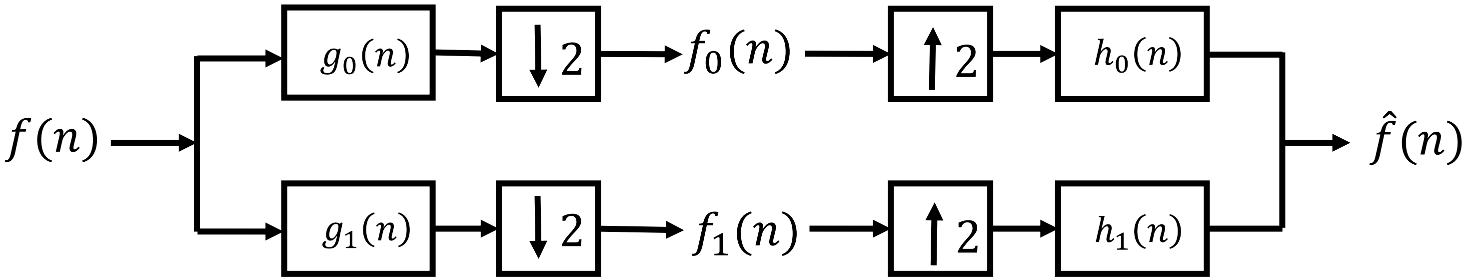
- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)}$$

$$\boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

$$\boldsymbol{g_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right] \xrightarrow{z} G_0(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right]$$

$$H_0(z) = G_1(-z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1z)^{-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{h_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

$$H_1(z) = -G_0(-z) = (-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1z)^{-1}\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{h_1(n)} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

2KDS - QMF – príklad

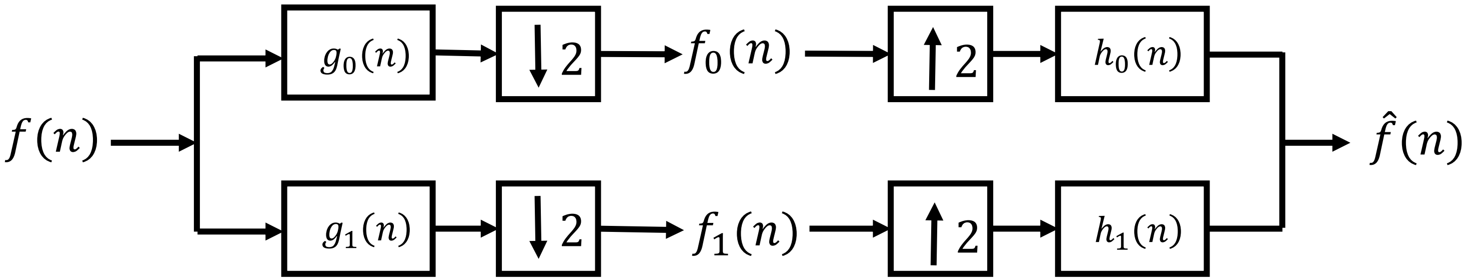
- Uvažujme QMS so známym filtrom analýzy:

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{G_1(z) = G_0(-z)}$$

$$\boxed{H_0(z) = G_1(-z)}$$

$$\boxed{H_1(z) = -G_0(-z)}$$



Zostavte ostatné filtre tejto 2KDS.

$$\boldsymbol{g_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right] \xrightarrow{z} G_0(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right]$$

$$H_0(z) = G_1(-z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1z)^{-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{h_0(n)} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

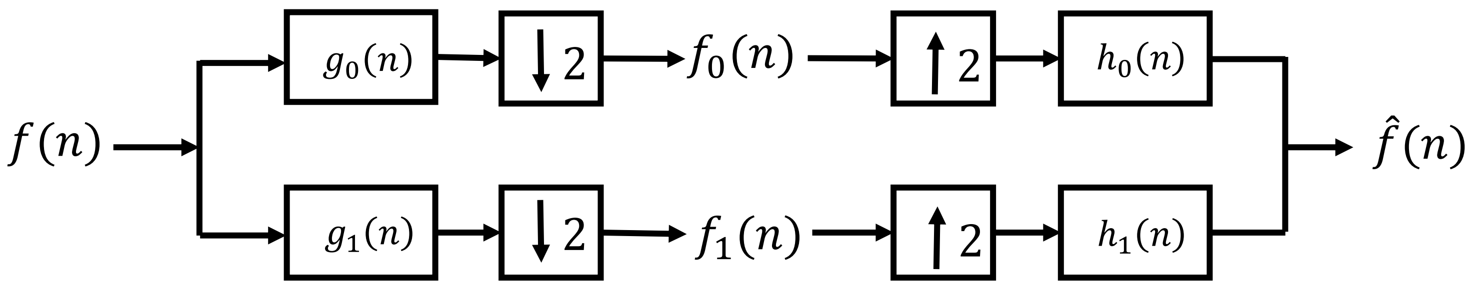
$$H_1(z) = -G_0(-z) = (-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1z)^{-1}\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \xrightarrow{z^{-1}} \boldsymbol{h_1(n)} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]$$

Získali sme filtre syntézy

2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$



- Takýmto impulzným odpovediam prislúchajú nasledovné prenosové charakteristiky:

$$G_0(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \qquad G_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \qquad H_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right] \qquad H_1(n) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right]$$

- Teda výsledný prenos bude nasledovný:

$$T(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{K-1} G_j(z)H_j(z) = \frac{G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)}{2} = \frac{G_0^2(z) - G_0^2(-z)}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right)^2}{2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

$$T(z) = z^{-1} \xrightarrow{z^{-1}} t(n) = \delta(n-1)$$

Je zrejmé, že po konvolúcii jednotkového impulzu so vstupným signálom, na výstupe dostaneme ten istý signál (oneskorený o 1).

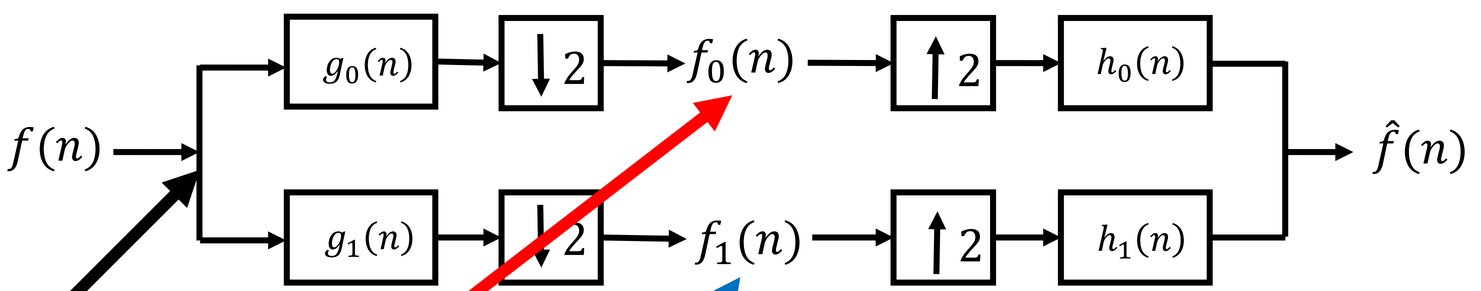
Prenos celej sústavy

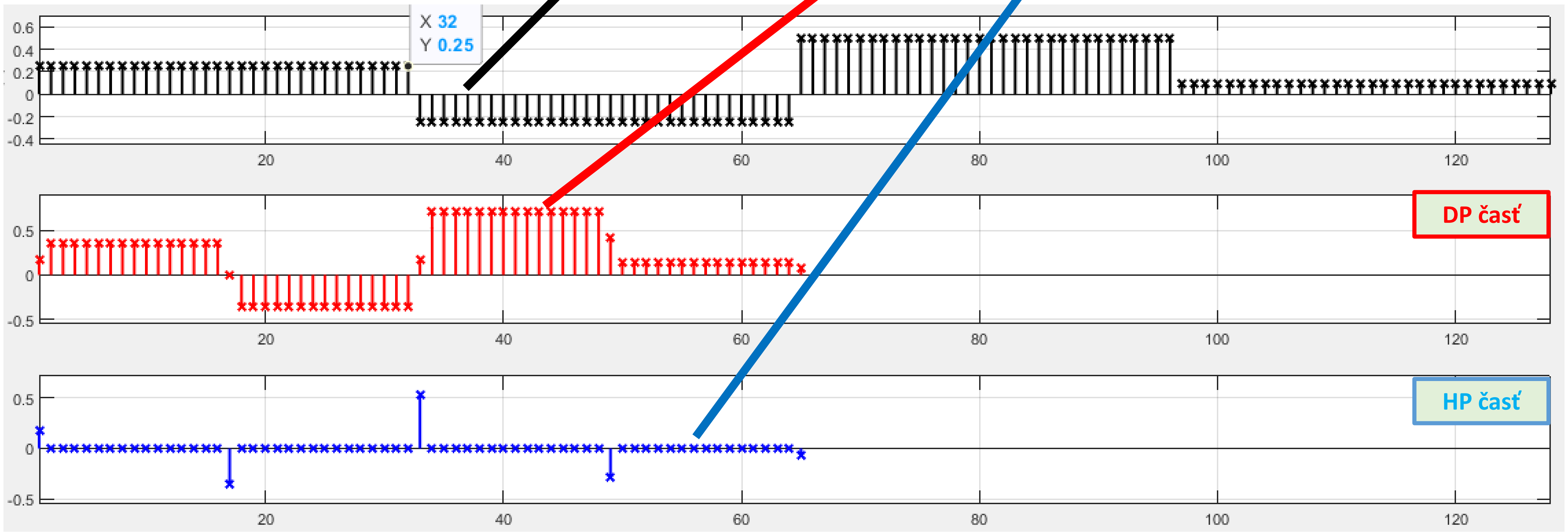
Impulzná odpoveď celej sústavy

2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

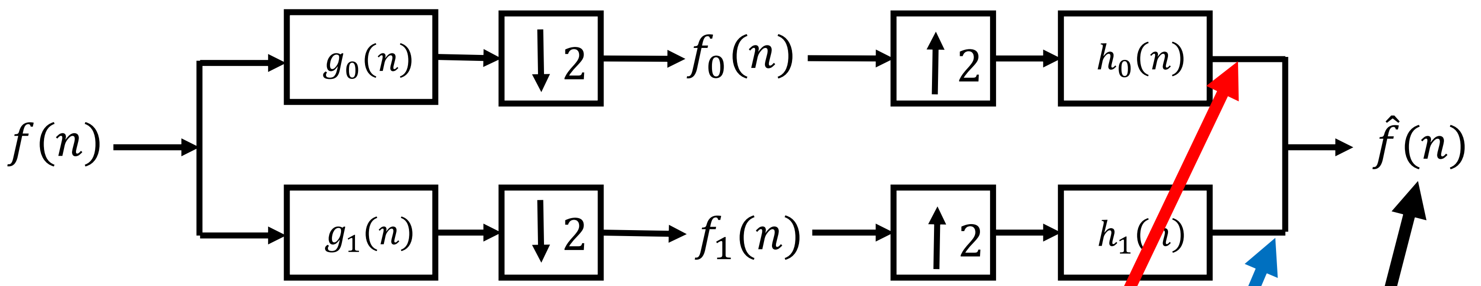


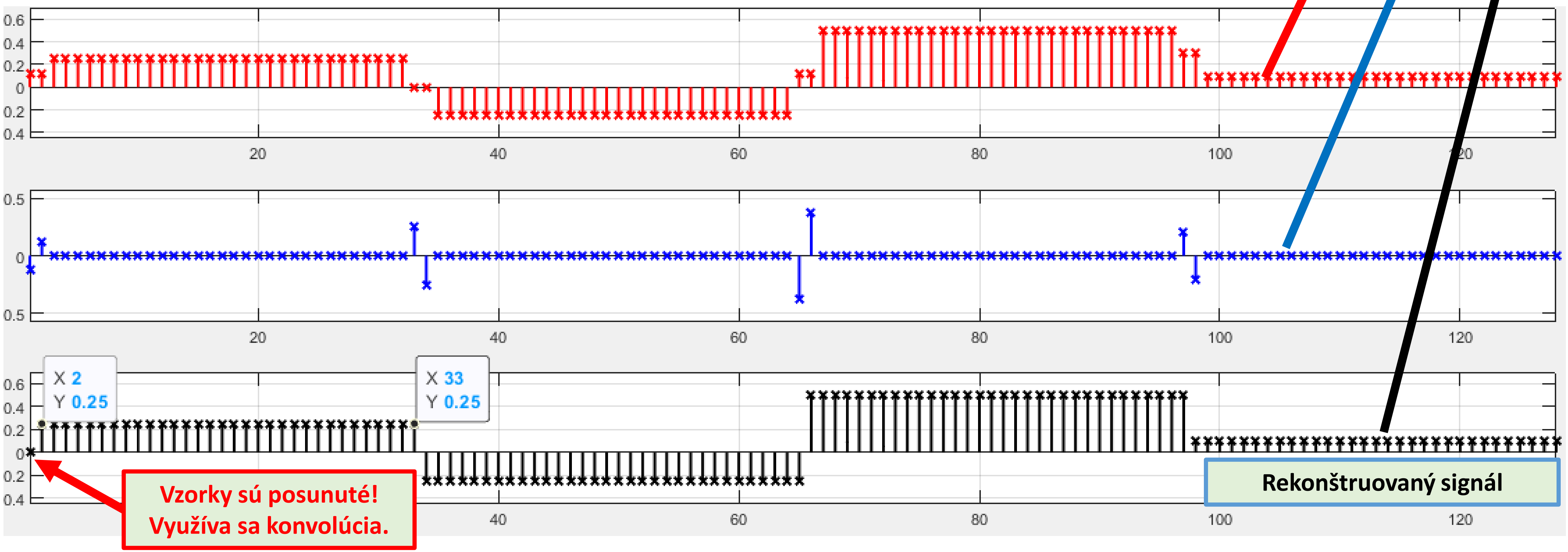


2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

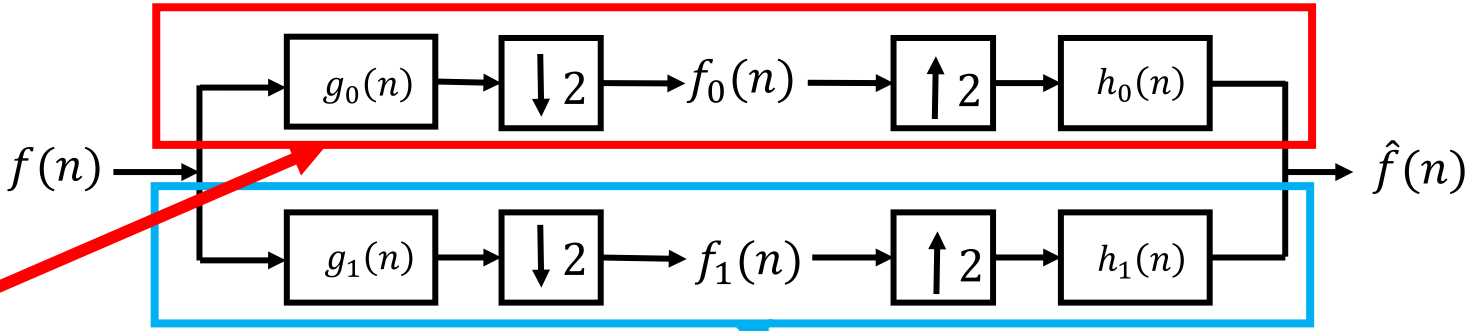


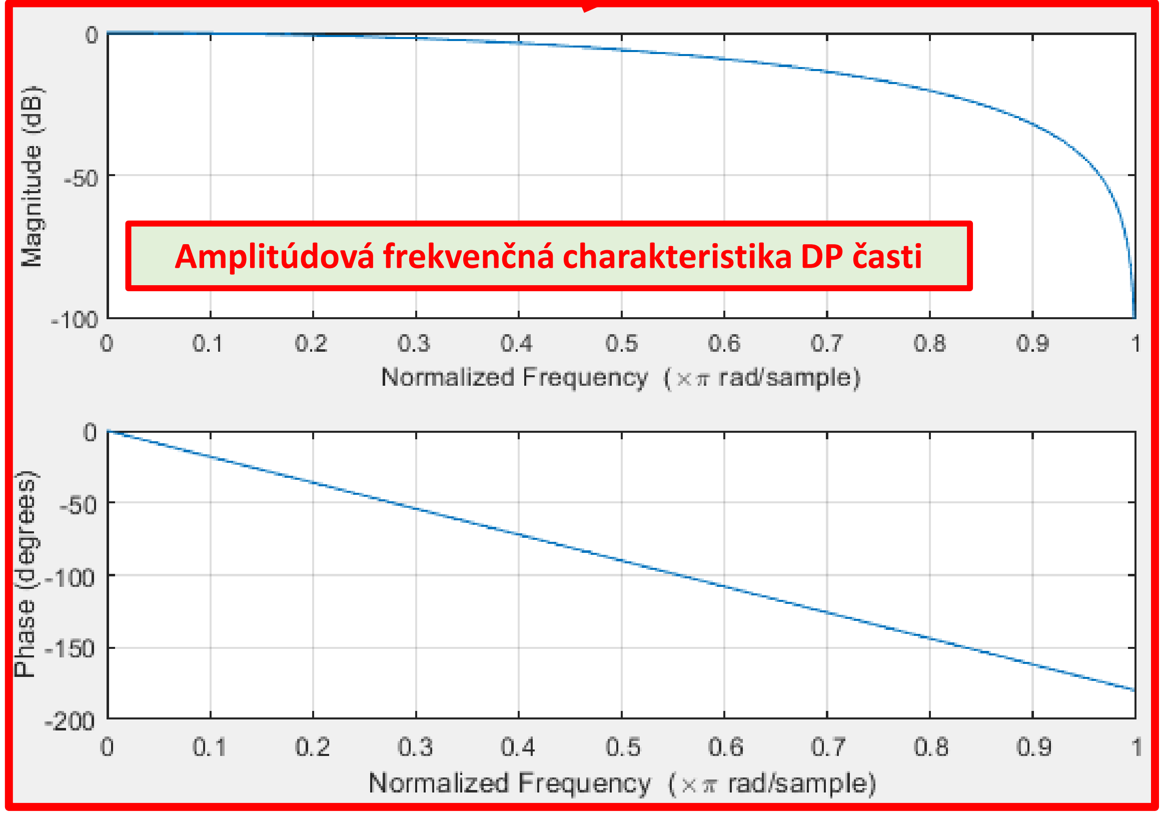


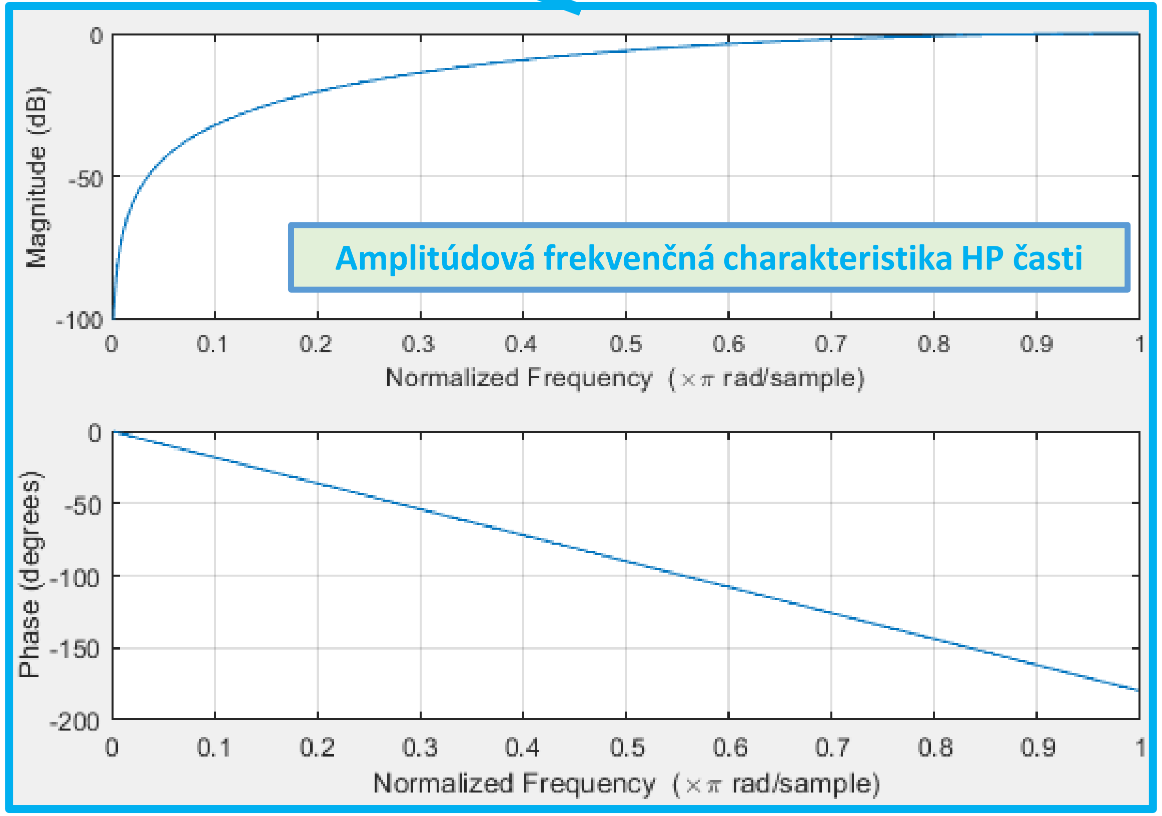
2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$



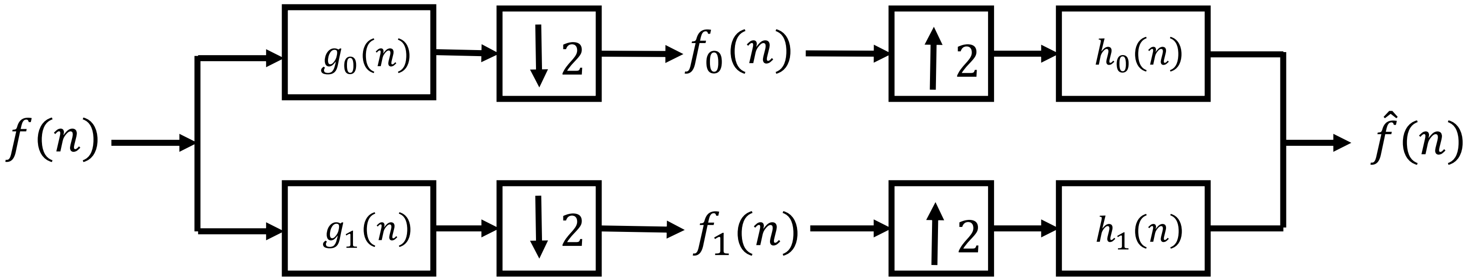


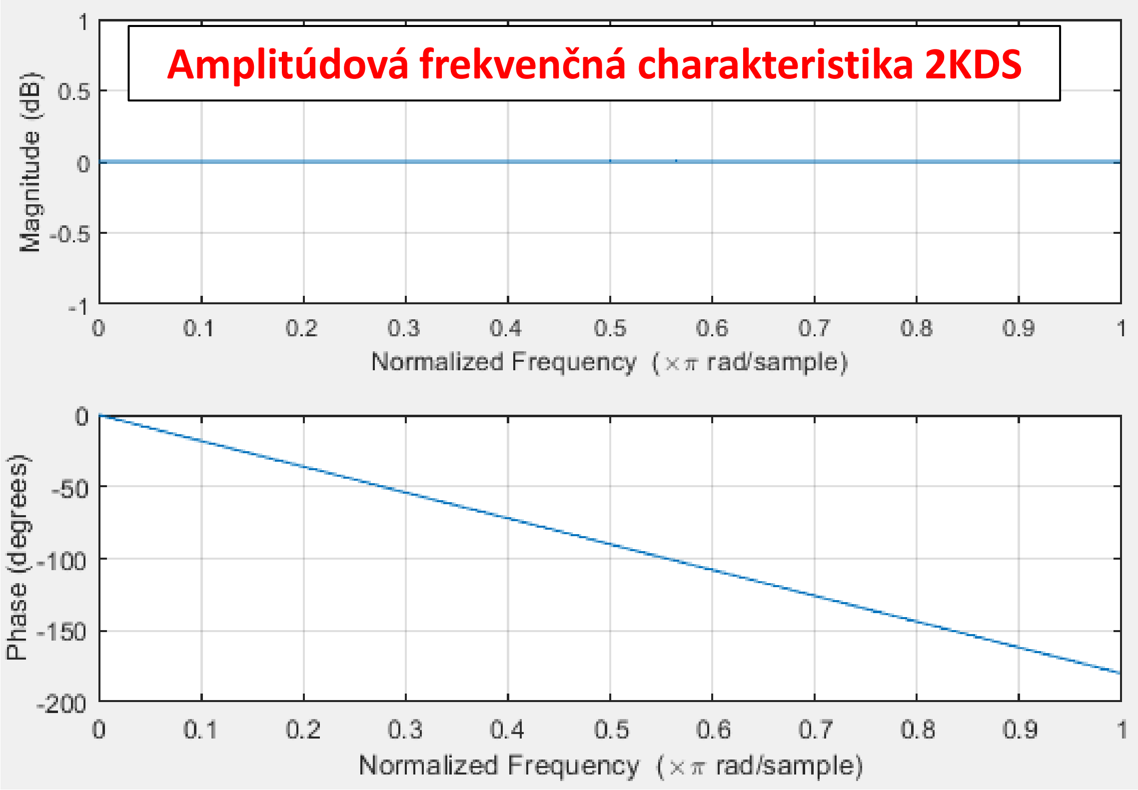


2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

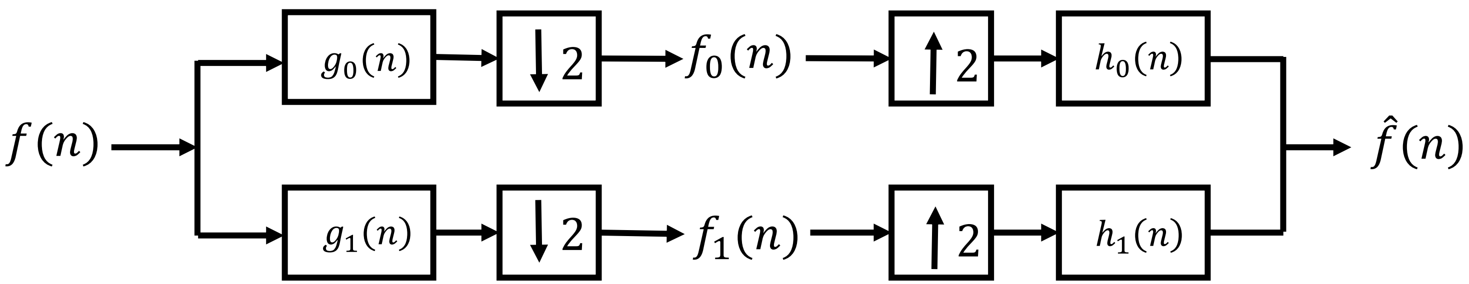


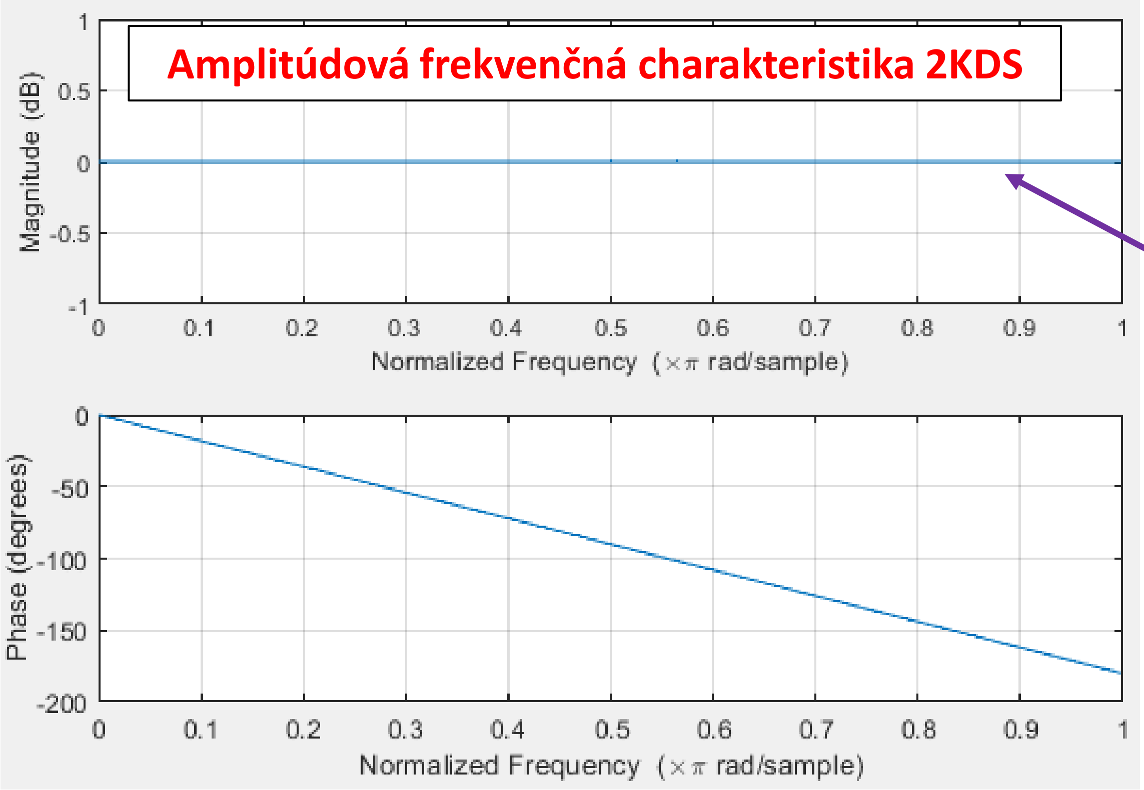


2KDS - QMF – príklad

$$g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad g_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$h_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad h_1(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$





Rovná čiara, teda signál na výstupe bude zhodný so signálom na vstupe.

$$T(z) = z^{-1} \xrightarrow{z^{-1}} t(n) = 1$$

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 6

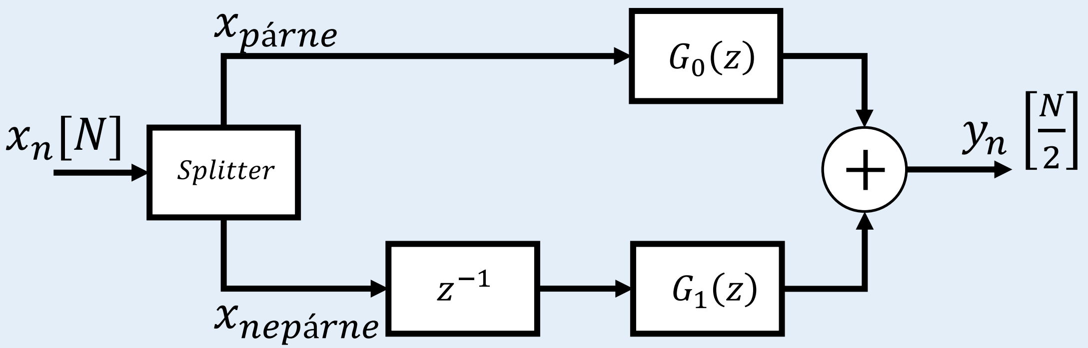
- Aktualizácia
- Mnohokanálové diskrétne systémy (MKDS)
- MKDS so stromovou štruktúrou
- Dvojkanálový diskrétny systém
- **Polyfázová reprezentácia MKDS**

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Polyfázová reprezentácia MKDS

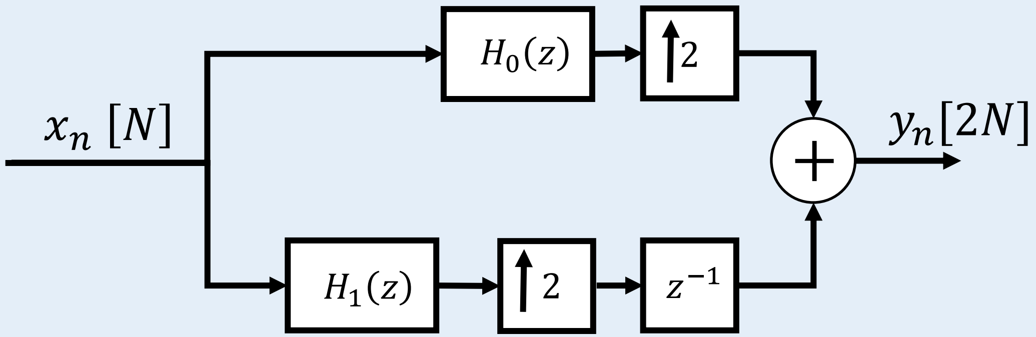
- Polyfázový rozklad prenosových funkcií filtrov analýzy a syntézy v mnohokanálových diskrétnych sústavách vedie k ich polyfázovej reprezentácii.
- **Jedná sa o efektívne spôsoby implementácie decimačných a interpolačných filtrov.**

Decimačný filter



- Vstupný signál najprv prechádza „spliterom“, v ktorom dochádza k rozdeleniu signálu do vetiev s párnymi a nepárnymi vzorkami.
- Párne vzorky postupujú hornou vetvou, kde sú následne filtrované.
- Nepárne vzorky postupujú dolnou vetvou a sú najprv oneskorené o jednu vzorku a následne filtrované.
- Výstup tohto filtra je daný súčtom výstupov z oboch filtrov.

Interpolačný filter



- Vstupný signál najprv prechádza je v oboch vetvách filtrovaný príslušnými filtrami
- Následne sú signály vo vetvách interpolované (doplnené nulami). V jednej vetve je interpolovaný signál oneskorený o jednu vzorku.
- Výstup tohto filtra je daný súčtom výstupov z oboch filtrov. (*Signály do seba zapadnú ako „dva hrebne“*)

Polyfázová reprezentácia MKDS - dvojzložkový polyfázový rozklad

Nech prenosová funkcia **filtra analýzy** je:

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^{-n}=g(0)+g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+g(3)z^{-3}+g(4)z^{-4}+\dots$$

Túto prenosovú funkciu je možné prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$G(z)=\underbrace{[g(0)+g(2)z^{-2}+g(4)z^{-4}+\cdots+g(N)z^{-N}]}_{\text{Párne členy}}+z^{-1}\underbrace{[g(1)+g(3)z^{-2}+g(5)z^{-3}+\cdots+g(N-1)z^{-N}]}_{\text{Nepárne členy}}$$

Párne členy

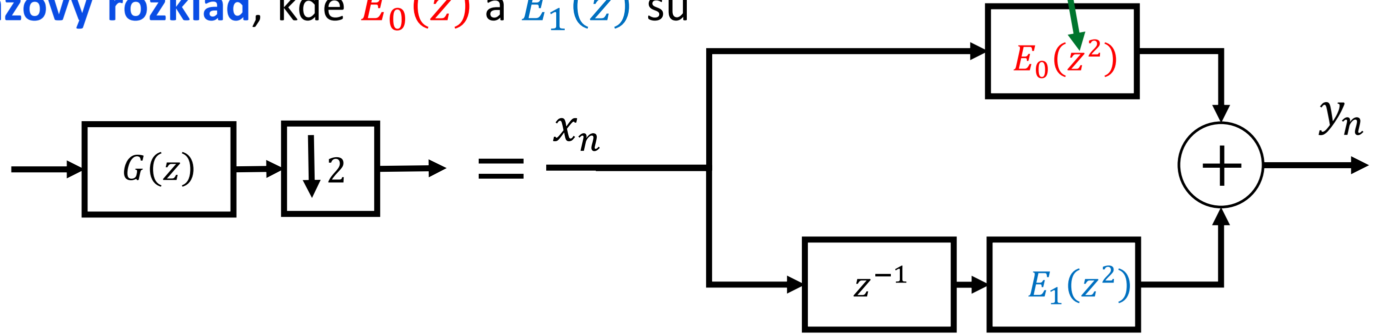
Nepárne členy

z^2 - Decimácia faktorom 2

Ďalšou úpravou a substitúciou $g(2n)\rightarrow e_0(n)$ a $g(2n+1)\rightarrow e_1(n)$

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g(2n)z^{-2n}+z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} g(2n+1)z^{-2n}=\sum_{n=0}^{\infty} e_0(n)z^{-2n}+z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} e_1(n)z^{-2n}=E_0(z^2)+z^{-1}E_1(z^2)$$

Takéto vyjadrenie $G(z)$ sa nazýva **dvojzložkový polyfázový rozklad**, kde $E_0(z)$ a $E_1(z)$ sú tvz. **polyfázové zložky 1. druhu**



Polyfázová reprezentácia MKDS – trojzložkový polyfázový rozklad

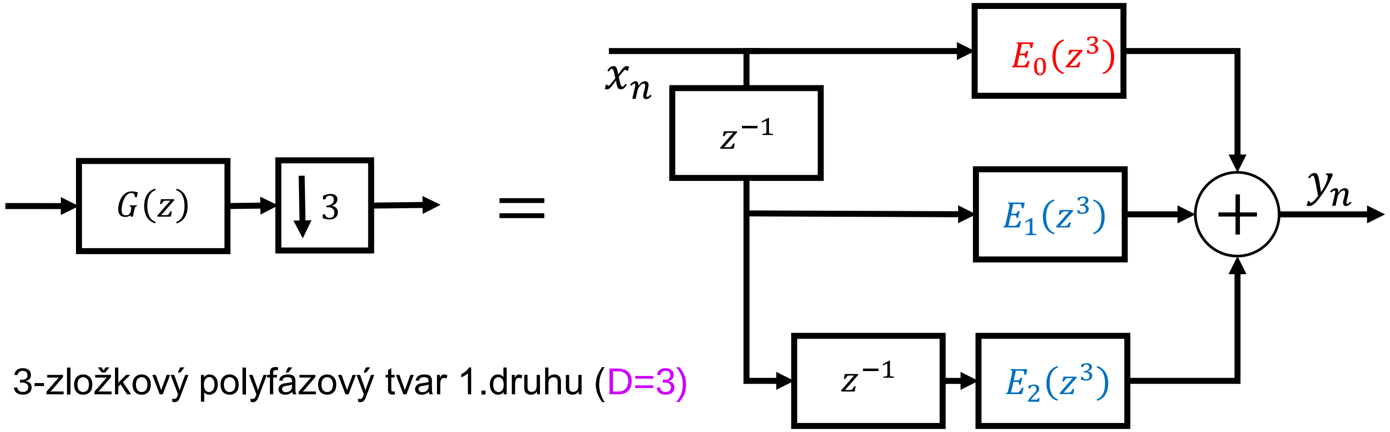
Nech prenosová funkcia **filtra analýzy** je:

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^{-n} = g(0)+g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+g(3)z^{-3}+g(4)z^{-4}+g(5)z^{-5}\ldots.$$

Pre 3-kanálovú polyfázovú štruktúru, túto prenosovú funkciu je možné prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$G(z)=[g(0)+g(3)z^{-3}]+z^{-1}[g(1)+g(4)z^{-3}]+z^{-2}[g(2)+g(2)z^{-3}]$$

$$G(z)=E_0(z^2)+z^{-1}E_1(z^2)+z^{-2}\,E_2(z^3)$$



3-zložkový polyfázový tvar 1.druhu (D=3)

Polyfázová reprezentácia MKDS – M-ložkový polyfázový rozklad

Analogicky je možné vyjadriť G(z) v **K**-zložkovom polyfázovom tvare

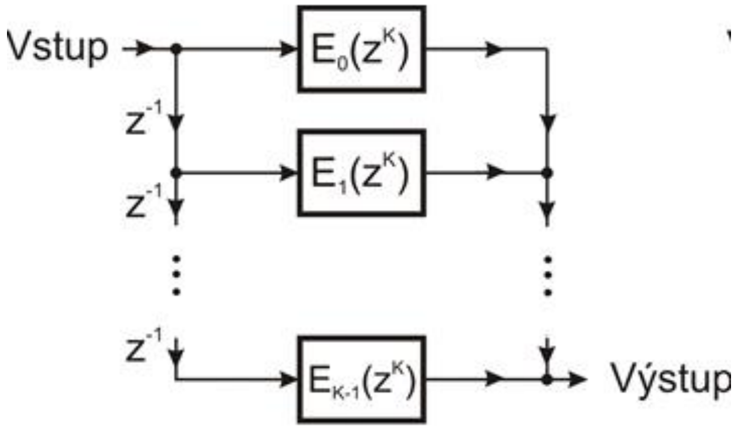
$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M) = E_0(z^M) + z^{-1}E_1(z^M) + z^{-2}E_2(z^M) + \cdots + z^{-M+1}E_{M-1}(z^M)$$

Kde $E_m(z)$ sú opäť **polyfázové zložky 1. druhu**.
Impulzná charakteristika g(n) je tak rozložená do **K** subpostupností

$$e_m(n) = g(nM + m), \quad 0 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{M} - 1$$

Kde $e_m(n)$ je decimovaná verzia z $g(n+m)$ s faktorom decimácie M.

K-zložkový polyfázový rozklad G(z) 1. druhu je znázornený na obr., pričom je potrebné poznamenať, že polyfázové zložky $E_m(z)$ závisia od K



Decimácia pomocou polyfázových filtrov

Princíp polyfázových filtrov:

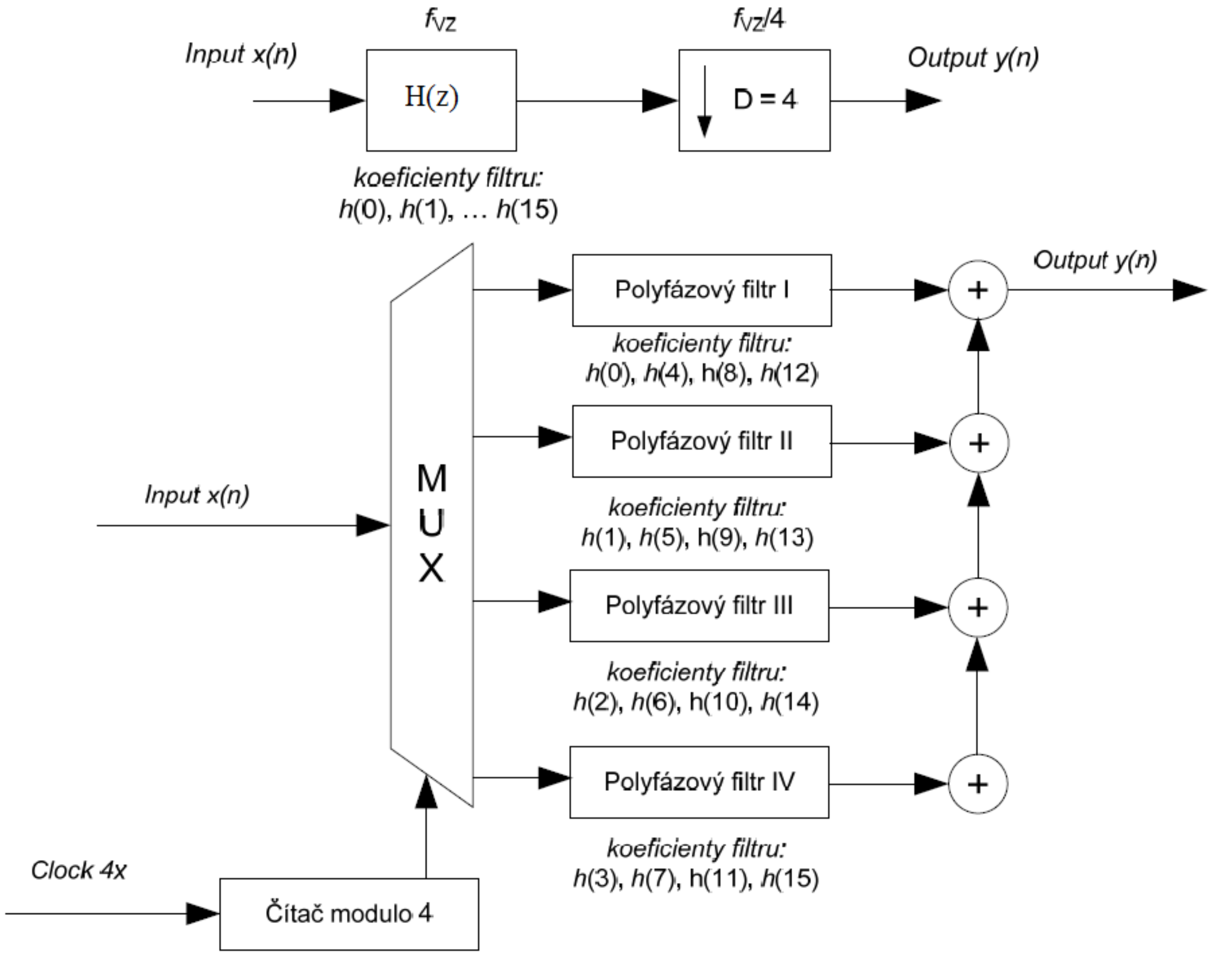
Rozdelenie pôvodného FIR filtra („**dlhého**“) do niekoľkých **kratších filtrov**

- Uvažujme pôvodný filter so 16-koeficientmi a požadovaný faktor decimácie D = 4.
- Pôvodný filter sa rozdelí na štyri menšie FIR filtre

  1. filter tvoria koeficienty h(0), h(4), h(8), h(12)

  2. filter :h(1), h(5), h(9), h(13)

  Analogickým spôsobom sa vytvorí aj 3. a 4. filter



Pri výpočte decimácie **(D=4)** je potrebných pri dĺžke **FIR N=16 celkovo 16x4 = 64 operácii, pri implementácii pomocou polyfázových filtrov iba 4x4 - t.j. významná úspora výpočtového výkonu !**

Polyfázová reprezentácia MKDS – M-ložkový pf rozklad 2. druhu

Alternatívna polyfázová reprezentácia G(z) bude mať tvar:

$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} R_m(z^M) = z^{-(M-1)} R_0(z^M) + z^{-(M-2)} R_1(z^M) + z^{-(M-3)} R_2(z^M) + \cdots + R_{M-1}(z^M)$$

Toto vyjadrenie G(z) sa nazýva **polyfázovým rozkladom 2.druhu** a $R_m(z)$ sú jeho **polyfázové zložky 2. druhu,** z ktorého je zrejmé, že $R_m(z)$ a $E_m(z)$ sú navzájom viazané vzťahom:

$$R_m(z) = E_{M-1-m}(z)$$

$m = 0, 1, 2 \quad K = 3$

$R_0(z) = E_{3-1}(z) = E_2(z)$

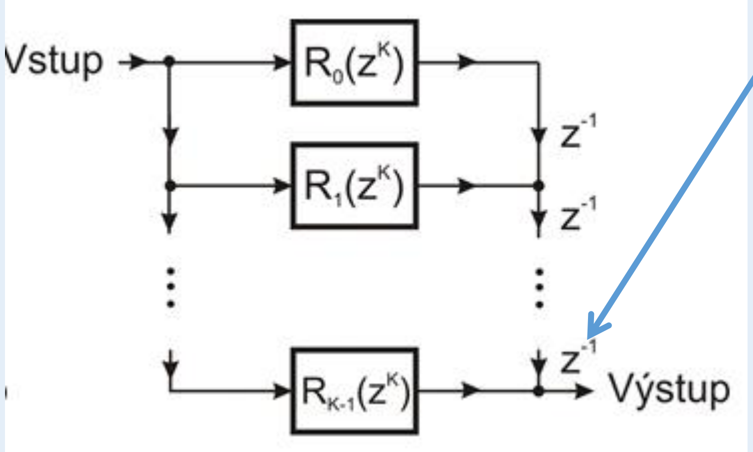
$R_1(z) = E_1(z)$

$R_2(z) = E_0(z)$

Polyfázový rozklad 2. druhu

$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} R_m(z^M)$$

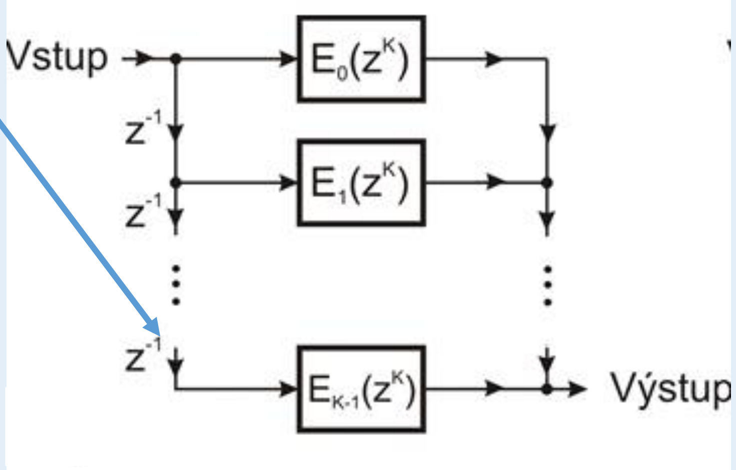
Oneskorenie za filtrami



Polyfázový rozklad 1. druhu

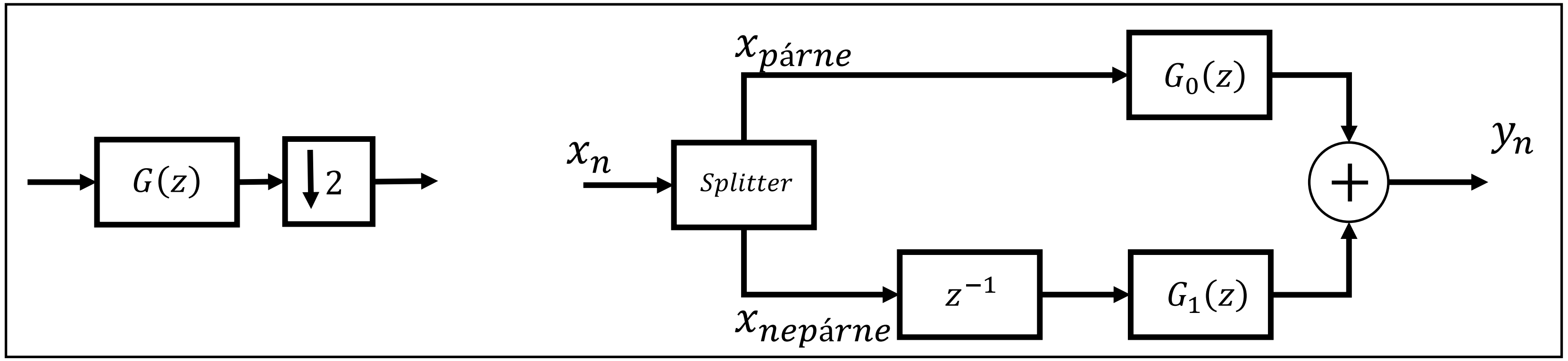
$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-n} E_m(z^M)$$

Oneskorenie pred filtrami



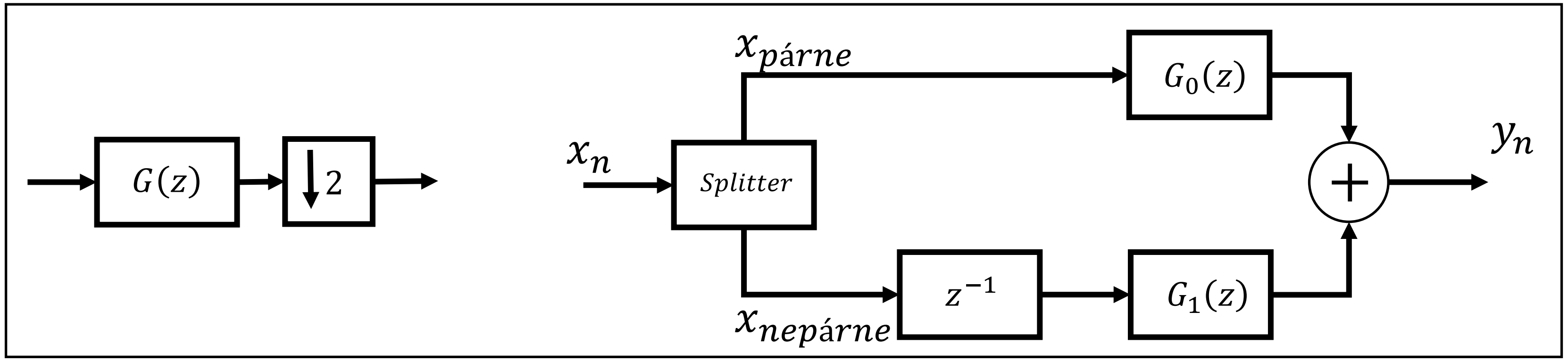
Polyfázová reprezentácia MKDS – Príklad 2KDS

- Pr. uvažujme decimačný filters faktorom 2 pričom impulzná odpoveď DP filtra je daná ako $g(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
- Vytvorte jeho polyfázovú implementáciu.
- Ekvivalenciu oboch zapojení overte pomocou Matlabu.



Polyfázová reprezentácia MKDS – Príklad 2KDS

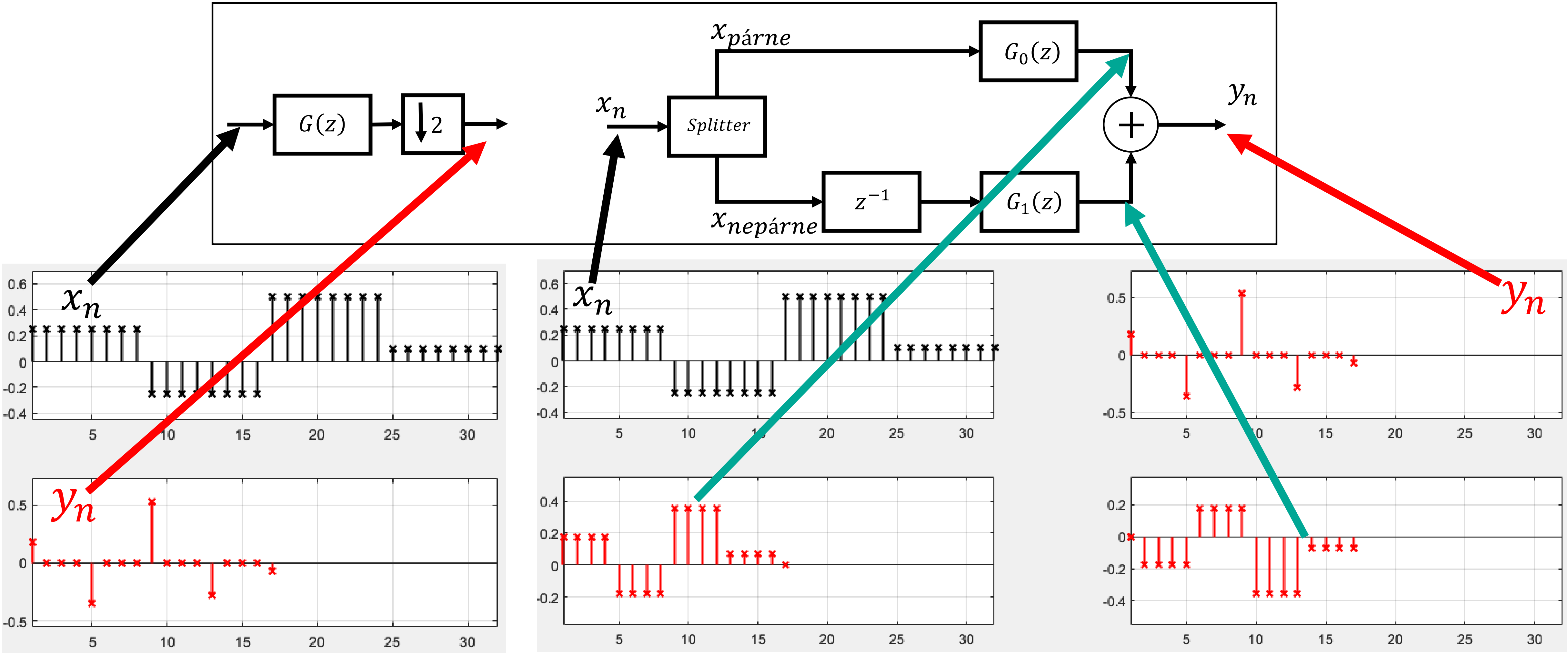
- Pr. uvažujme decimačný filters faktorom 2 pričom impulzná odpoveď DP filtra je daná ako $g(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
- Vytvorte jeho polyfázovú implementáciu.
- Ekvivalenciu oboch zapojení overte pomocou Matlabu.



- Filter hornej vety pozostáva z párnych koeficientov $g_0(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
- Filter hornej vety pozostáva z nepárnych koeficientov $g_1(n) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

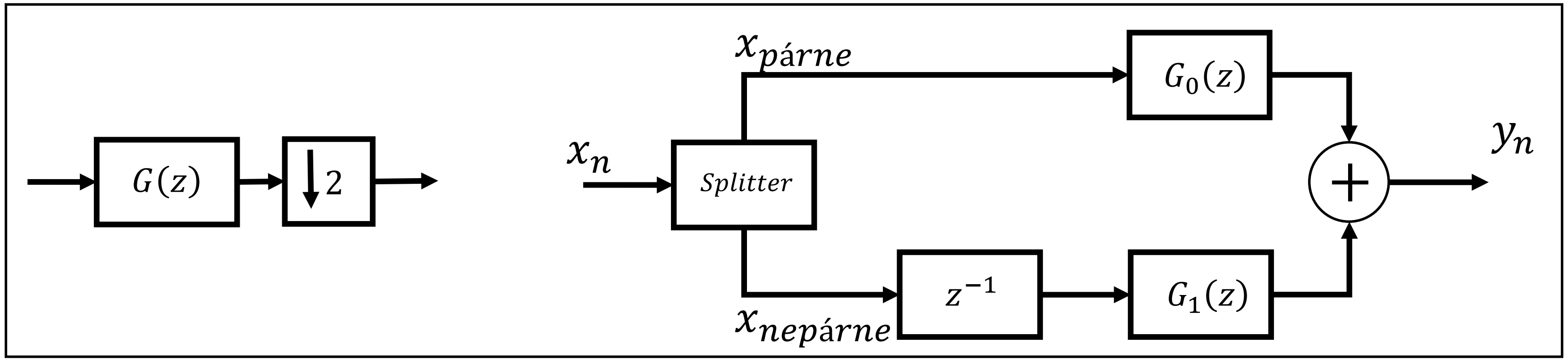
Polyfázová reprezentácia MKDS – Príklad 2KDS

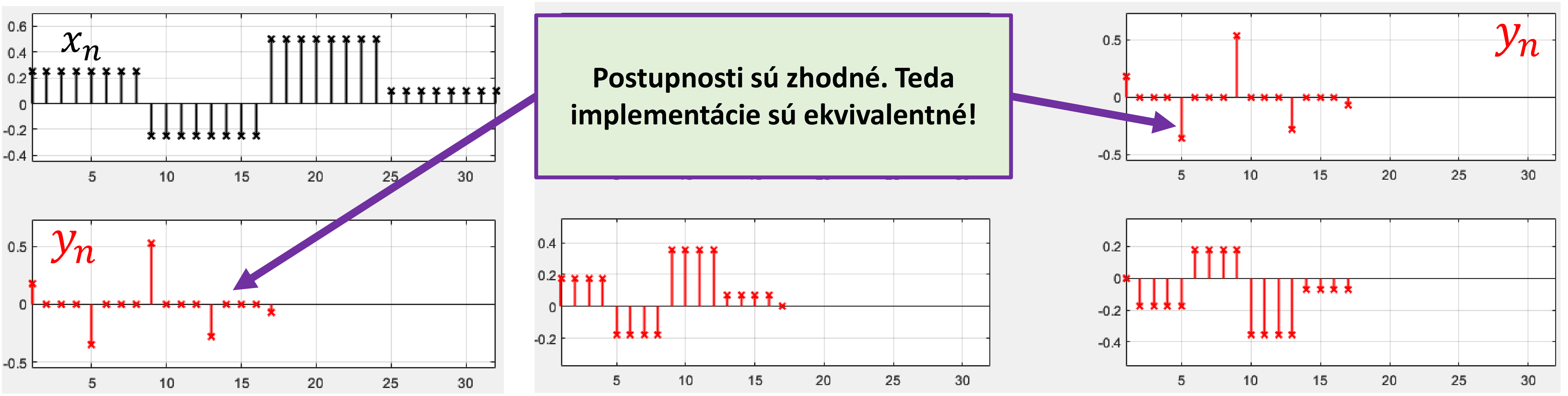
- Pr. uvažujme decimačný filters faktorom 2 pričom impulzná odpoveď DP filtra je daná ako $g(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
- Vytvorte jeho polyfázovú implementáciu.
- Ekvivalenciu oboch zapojení overte pomocou Matlabu.



Polyfázová reprezentácia MKDS – Príklad 2KDS

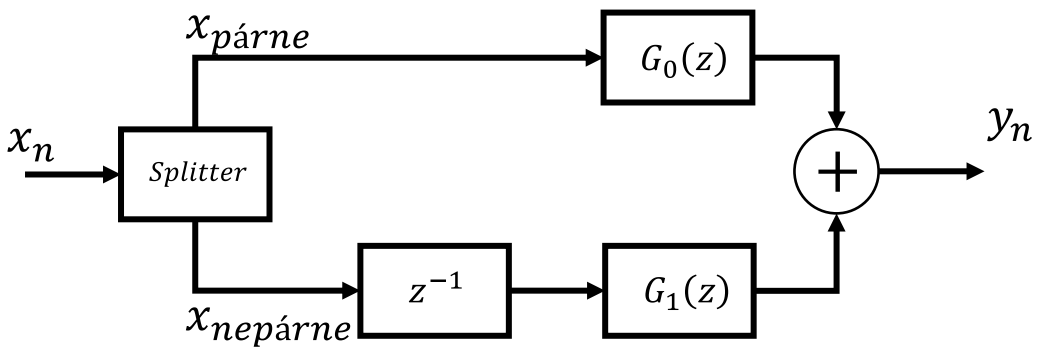
- Pr. uvažujme decimačný filters faktorom 2 pričom impulzná odpoveď DP filtra je daná ako $g(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
- Vytvorte jeho polyfázovú implementáciu.
- Ekvivalenciu oboch zapojení overte pomocou Matlabu.

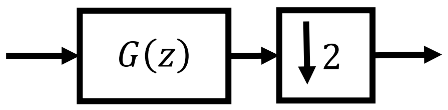




Polyfázová reprezentácia MKDS – Príklad 2KDS

```
clear;
clc;
N = 32;
n = 1:1:N;
f_n(1:N/4) = 0.25;
f_n(1+N/4:N/2) = -0.25;
f_n(1+N/2:3*N/4) = 0.5;
f_n(1+3*N/4:end) = 0.1;
% 2KDS
g0 = [1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];
f0 = conv(f_n, g0);
f0 = f0(1:2:end);
% Polyfazova 2KDS
f01 =conv( [f_n(1:2:end) 0],g0(1) );
f02 =conv( [0, f_n(2:2:end)],g0(2) );
f0x=f01+f02;
% Vykreslenie vysledkov
figure(1), subplot(2,1,1), stem(n,f_n,'x','linewidth',1.5,'color', 'black'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f_n)-0.2 max(f_n)+0.2]);
subplot(2,1,2), stem(f0,'x','linewidth',1.5,'color', 'red'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f0)-0.2 max(f0)+0.2]);
figure(2), subplot(2,2,1), cla; stem(n,f_n,'x','linewidth',1.5,'color', 'black'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f_n)-0.2 max(f_n)+0.2]);
subplot(2,2,2), stem(f0x,'x','linewidth',1.5,'color', 'red'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f0x)-0.2 max(f0x)+0.2]);
subplot(2,2,3), stem(f01,'x','linewidth',1.5,'color', 'red'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f01)-0.2 max(f01)+0.2]);
subplot(2,2,4), stem(f02,'x','linewidth',1.5,'color', 'red'); grid on; xlim([1, N]);ylim([min(f02)-0.2 max(f02)+0.2]);
```





Polyfázová reprezentácia MKDS

Vyjadrenie prenosu v tvare: $G(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$ platí nielen pre G(z) typu FIR, ale aj pre IIR.

Napr. pre filter analýzy typu IIR (NIO), ktorého prenos je daný ako: $G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ je možné prepísať na tvar $G(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$ nasledovne:

- Prenosová funkcia $G(z)$ sa rozšíri výrazom $\frac{1+az^{-1}}{1+az^{-1}}$

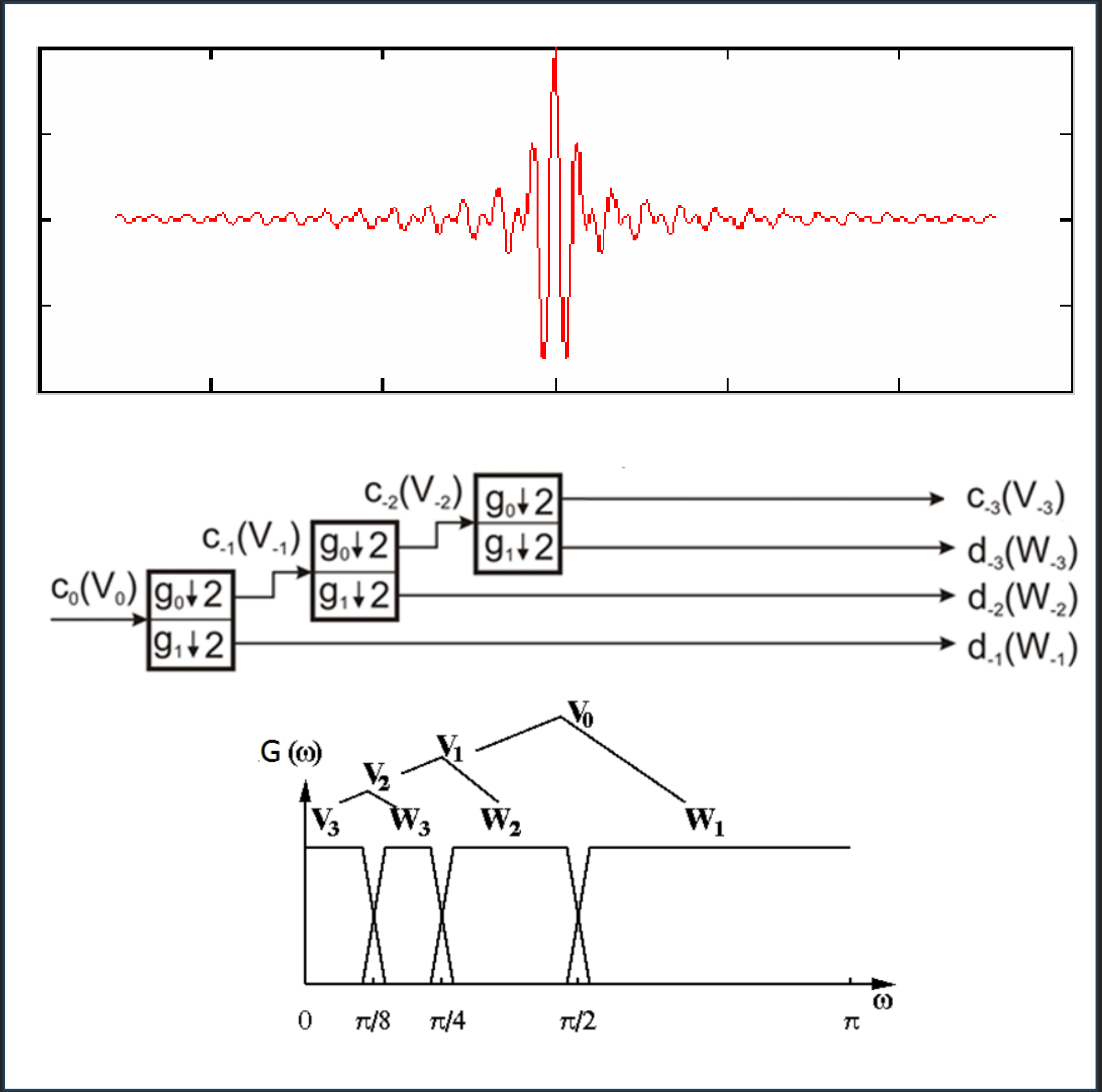
$$G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \frac{1+az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

- a po úprave:

$$G(z) = \frac{1}{1-a^2z^{-2}} + \frac{az^{-1}}{1-a^2z^{-2}} = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

Ďakujem za pozornosť!



Nabudúce:

- Waveletová transfomácia