



Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 5

- **Aktualizácia**
- Realizačná časť syntézy IIR filtrov
- Realizačná časť syntézy FIR filtrov
- Rekapitulácia FIR a IIR filtrov
- Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie

Aktualizácia

Ako ma rozmiestnené póly filter typu FIR?

Aktualizácia

**Aká podmienka musí platiť, aby mal FIR filter lineárnu
fázovú frekvenčnú charakteristiku?**

Aktualizácia

Čo znamená ak je skupinové oneskorenie konštantné a prečo je to dôležité?

Aktualizácia

V čom spočíva princíp metódy frekvenčnej diskretizácie?

Aktualizácia

V čom spočíva princíp metódy invariantnej impulznej charakteristiky?

Aktualizácia

V čom spočíva princíp metódy bilineárnej transformácie?

Aktualizácia

**Ako vyzerá výsledná prenosová funkcia filtrov
zapojených sériovo?**



Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 5

- Aktualizácia
- **Realizačná časť syntézy IIR filtrov**
- Realizačná časť syntézy FIR filtrov
- Rekapitulácia FIR a IIR filtrov
- Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie

Realizačná časť syntézy IIR filtrov

Poznáme štyri kanonické formy realizácie ČF IIR;

1. Kanonická forma
2. Kanonická forma
3. Kanonická forma (kaskádne zapojenie) tj $G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot G_3(z) \dots$
4. Kanonická forma (paralelné zapojenie) tj $G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \dots$

1. a 2. forma sa používajú **nanajvýš do druhého rádu filtra**,
3. a 4. sa používajú pri vyšších rádoch filtra (tri a vyššie).



kanonický = optimálny

Kanonické formy obsahujú najmenší možný počet základných obvodových prvkov ČF (sčítačiek, násobičiek a oneskorovacích členov)

Realizačná časť syntézy IIR filtrov – I. Kanonická forma

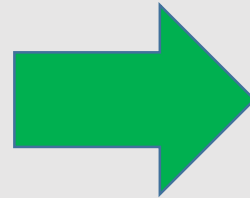
Prenosová funkcia ČF predstavuje **podiel obrazov výstupného $Y(z)$ a vstupného signálu $X(z)$** .

- je to racionálna lomená funkcia tvaru:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-1} + a_3z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-1} + b_3z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}$$

- Odozva (výstup) ČF IIR je daná nasledovne:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{b_0 \mathbf{1} + \sum_{k=1}^M b_k z^{-k}} X(z)$$



$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^M b_k z^{-k}$$

- Po spätnej Z-transformácii a pomocou vety o posunutí postupnosti je získaná diferenčná rovnica (pre jednoduchosť, nech $N = M = R$)

Rovnici zodpovedá zapojenie ČF IIR, ktoré reprezentuje **1.kanonickú formu**

$$y(n) = \sum_{k=0}^R a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^R b_k y(n-k)$$

R - predchádzajúcich vzoriek výstupnej postupnosti $\{y(nT)\}$

R - predchádzajúcich vzoriek výstupnej postupnosti $\{y(nT)\}$

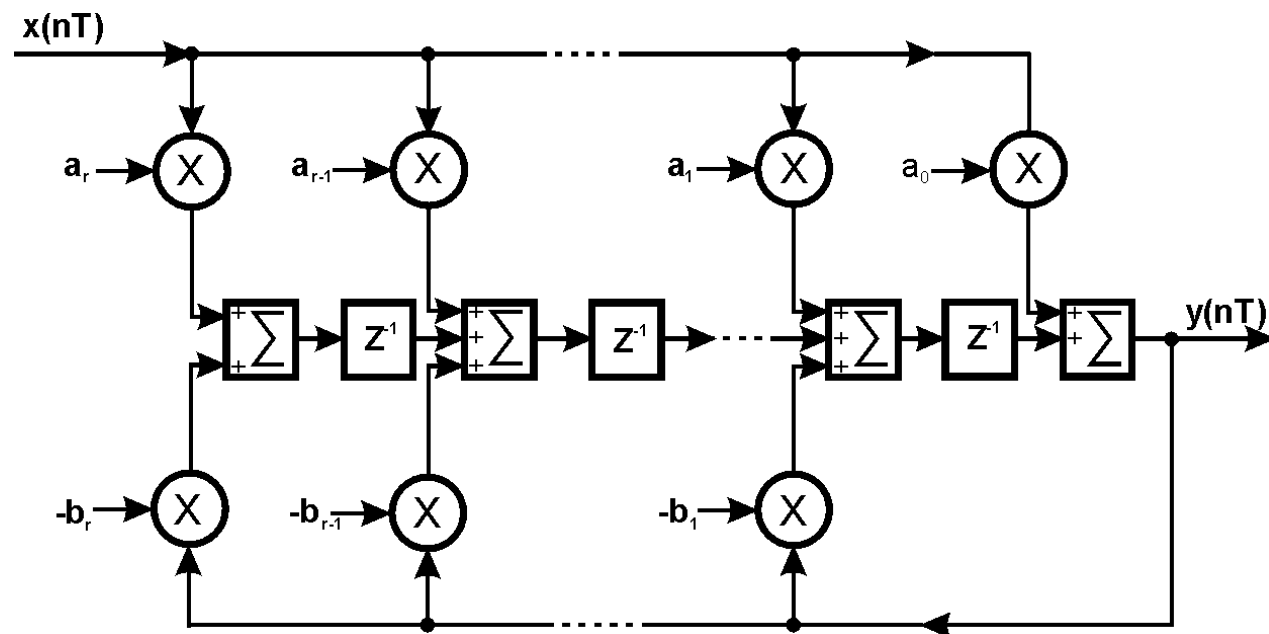
Realizačná časť syntézy IIR filtrov – I. Kanonická forma

Rovnici zodpovedá zapojenie ČF IIR, ktoré reprezentuje 1.kanonickú formu

$$y(n) = \sum_{k=0}^R a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^R b_k y(n-k)$$

ČF IIR obsahuje tri základné bloky: sčítačky (odčítačky), násobičky a oneskorovacie členy s oneskorením jednej diskretizačnej periódy T (ak nie je známa vzorkovacia frekvencia, tak $T=1$)

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_R x(n-R) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) - \dots - b_R y(n-R)$$



Realizácia ČF IIR
v I. kanonickej forme

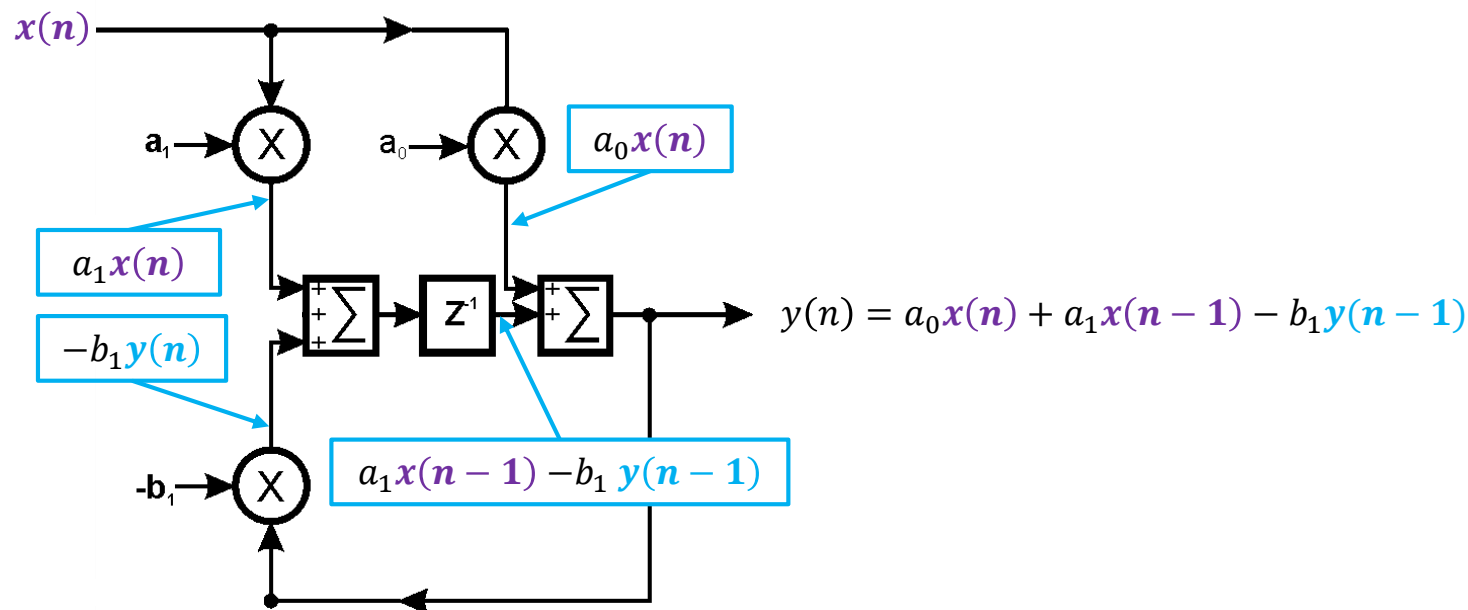
Realizačná časť syntézy IIR filtrov – I. Kanonická forma

Rovnici zodpovedá zapojenie ČF IIR, ktoré reprezentuje 1.kanonickú formu

$$y(n) = \sum_{k=0}^R a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^R b_k y(n-k)$$

ČF IIR obsahuje tri základné bloky: sčítačky (odčítačky), násobičky a oneskorovacie členy s oneskorením jednej diskretizačnej periódy T (ak nie je známa vzorkovacia frekvencia, tak $T=1$)

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1) + a_2 x(n-2) - b_2 y(n-2) + \dots + a_R x(n-R) - b_R y(n-R)$$



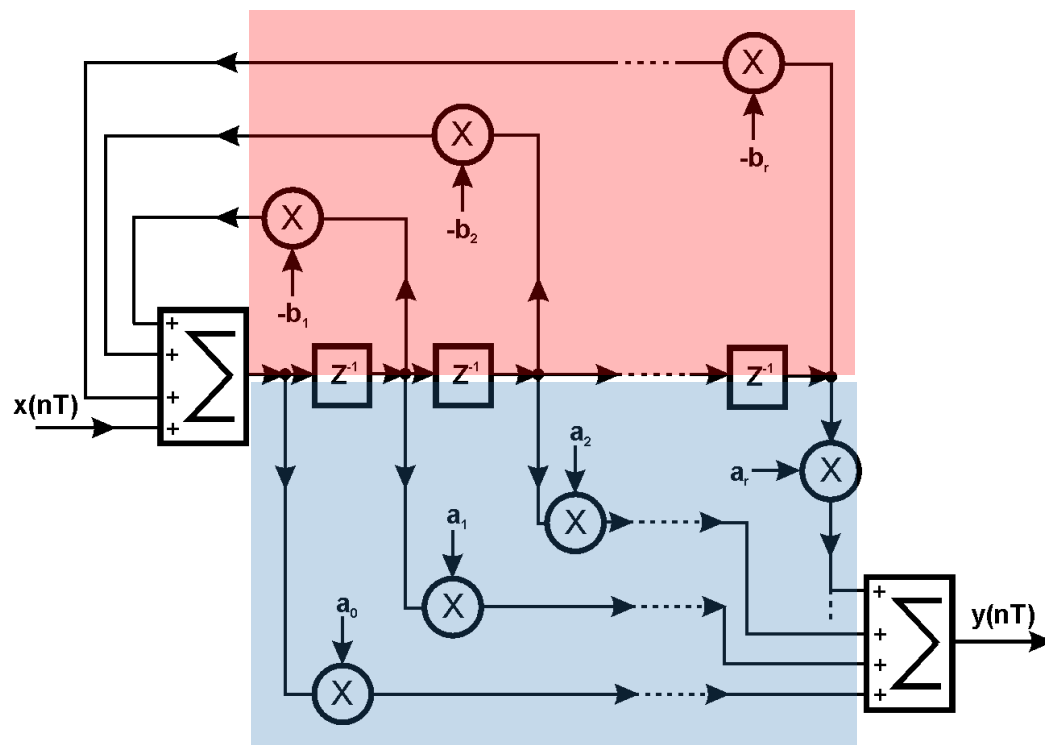
Realizácia ČF IIR 1. radu
v I. kanonickej forme

Realizačná časť syntézy IIR filtrov – II. Kanonická forma

ČF IIR obsahuje **tri základné bloky**: **sčítačky** (odčítačky), **násobičky** a **oneskorovacie členy** s oneskorením jednej diskretizačnej periódy T (ak nie je známa vzorkovacia frekvencia, tak $T=1$)

Zapojenie II. kanonickej formy sa získa z prenosovej funkcie $G(z)$, ktorá sa rozloží na tvar:

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{1}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + \dots + b_Mz^{-R}} (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots + a_Nz^{-R})$$



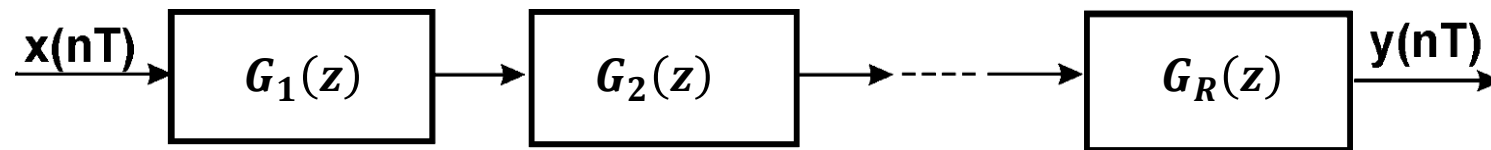
Realizácia ČF IIR
v II. kanonickej forme

Realizačná časť syntézy IIR filtrov – III. Kanonická forma

Zapojenie III. Kanonickej formy sa získa z prenosovej funkcie $G(z)$ - v tvare **súčinu jednoduchších prenosových funkcií** :

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)G_3(z) \dots G_{R-1}(z)G_R(z)$$

To zodpovedá **kaskádnemu zapojeniu** jednoduchších číslicových filtrov (jednotlivé jednoduchšie prenosové funkcie realizujeme buď v 1. alebo 2.kanonickej forme).

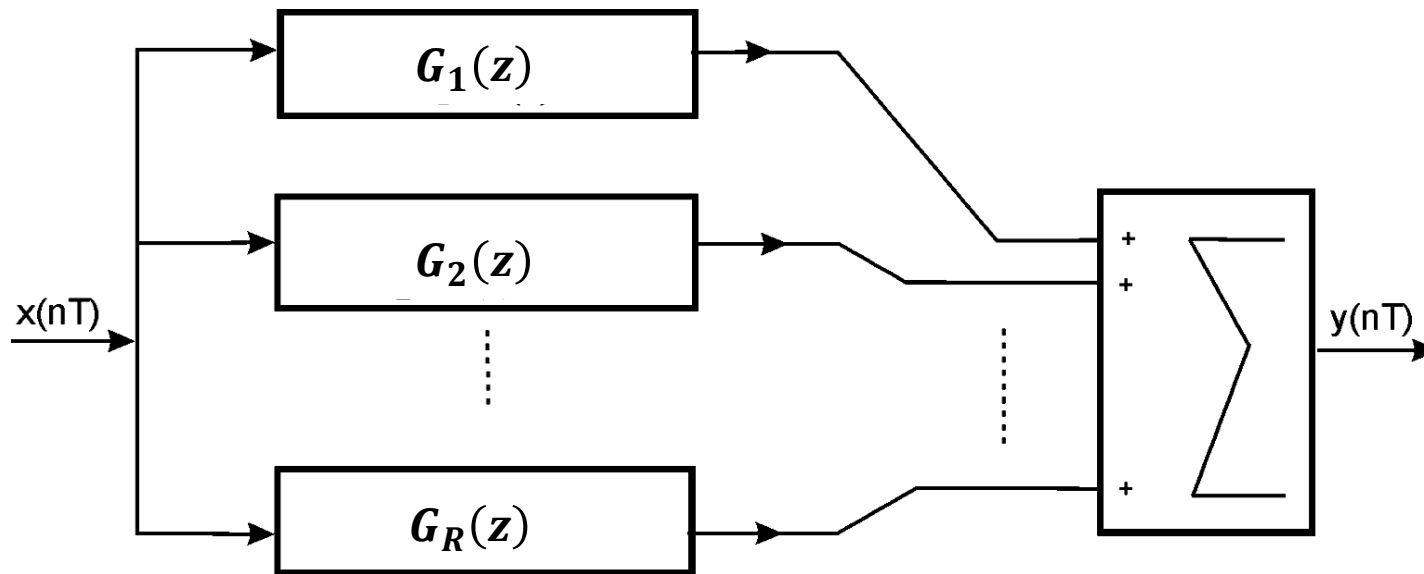


Realizačná časť syntézy IIR filtrov – IV. Kanonická forma

Zapojenie IV. Kanonickej formy sa získa z prenosovej funkcie $G(z)$ - v tvare súčtu jednoduchších prenosových funkcií:

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \dots + G_{R-1}(z) + G_R(z)$$

To zodpovedá **paralelnému zapojeniu** jednoduchších číslicových filtrov (jednotlivé jednoduchšie prenosové funkcie realizujeme buď v 1. alebo 2.kanonickej forme).



Realizácia ČF IIR
v IV. kanonickej forme



Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 5

- Aktualizácia
- Realizačná časť syntézy IIR filtrov
- **Realizačná časť syntézy FIR filtrov**
- Rekapitulácia FIR a IIR filtrov
- Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie

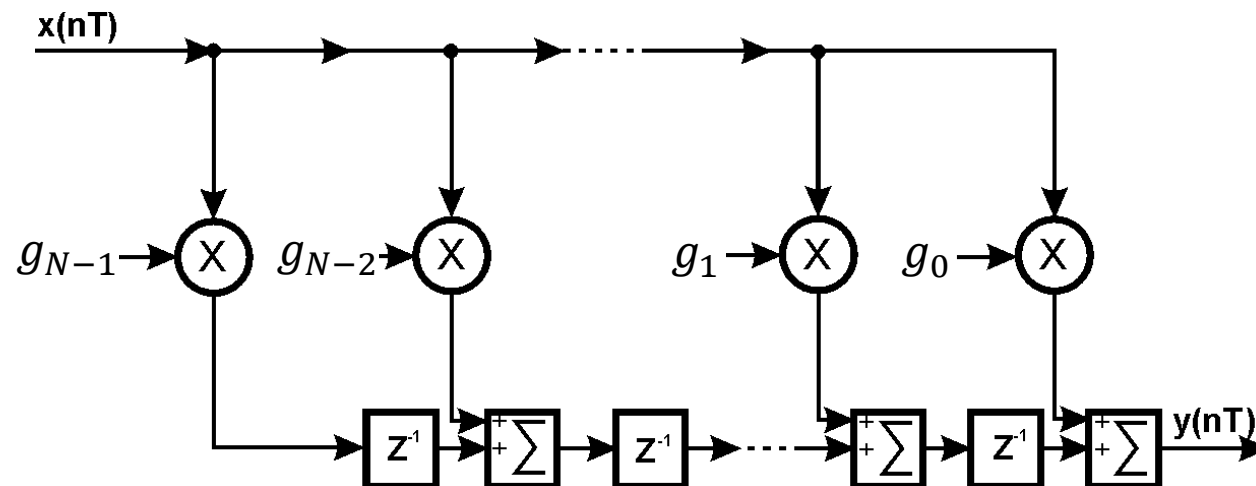
Realizačná časť syntézy FIR filtrov

- Realizácia FIR filtrov je vzhľadom k tomu, že nemajú spätnú väzbu je oproti realizácii IIR filtrov jednoduchšia.
- Prenosovej funkcii v tvare:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) z^{-n} = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-1} + g_3 z^{-1} + \dots + g_N z^{-(N-1)}$$

- zodpovedá zapojenie:

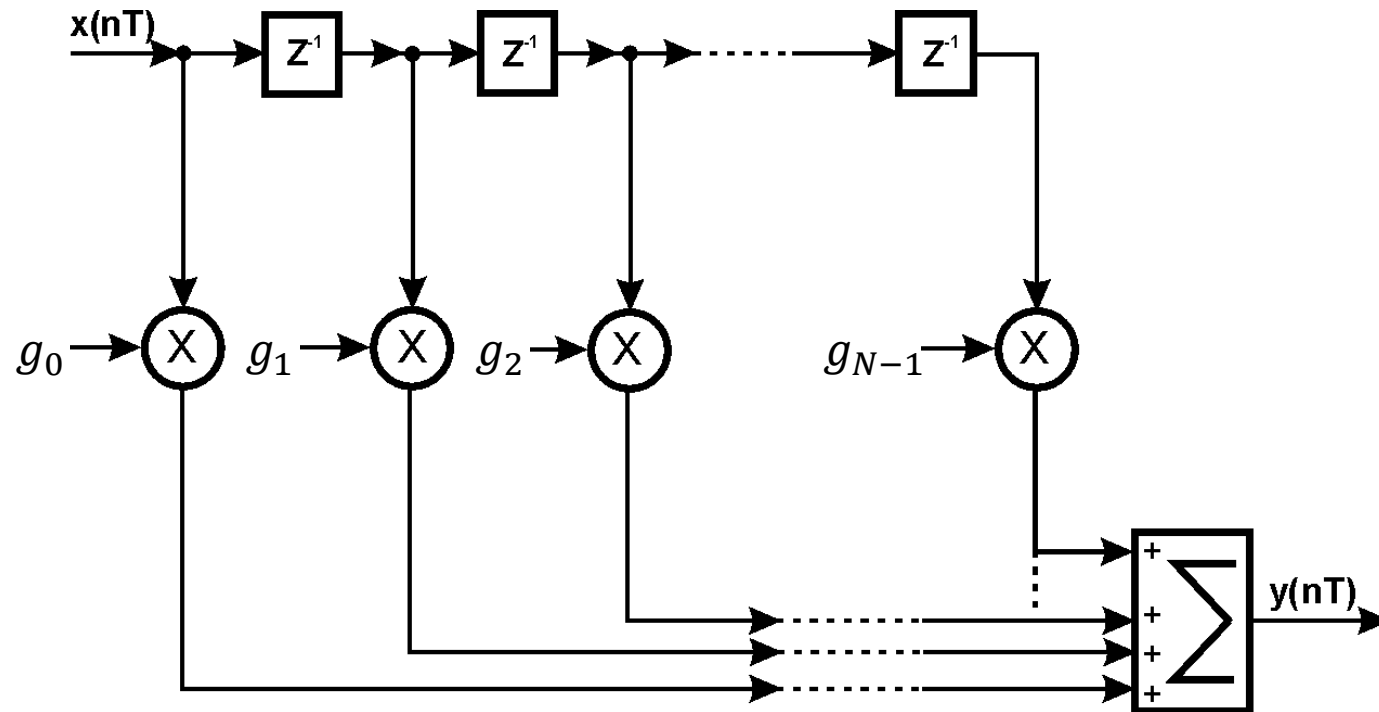
$$X(z)G(z) \stackrel{z}{\leftrightarrow} y(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k x(n-k) = g_0 x(n) + g_1 x(n-1) + g_2 x(n-2) + \dots$$



Realizačná časť syntézy FIR filtrov

- Tiež je možná realizácia iba s jednou sčítačkou:

$$X(z)G(z) \stackrel{z}{\leftrightarrow} y(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k x(n-k) = g_0 x(n) + g_1 x(n-1) + g_2 x(n-2) + \dots$$





Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 5

- Aktualizácia
- Realizačná časť syntézy IIR filtrov
- Realizačná časť syntézy FIR filtrov
- **Rekapitulácia FIR a IIR filtrov**
- Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie

Rekapitulácia FIR a IIR filtrov

FIR

- **Finite Impulse Response**
- vždy stabilný – dané N-násobným pólom priamo v nule (N-tý rád filtra)
- majú presnú lineárnu fázu
- ľahko sa navrhujú, pretože koeficienty filtra sú zároveň vzorky impulznej charakteristiky
- vysoké rády filtra (50 -100 a viac)
- neosciluje
- menšia citlivosť na kvantovanie koeficientov
- *nevýhody* – nárast oneskorenia (kvôli vysokému rádu filtra)
– veľké nároky na pamäť pri výpočte koeficientov filtra

IIR

- **Infinite Impulse Response**
- môže byť nestabilný
- jednoduchší návrh
- nízke rády filtra (do 10)
- malé oneskorenie
- k ČF je možné nájsť analógový ekvivalent
- *nevýhody* – nelineárna fáza
– veľká citlivosť na kvantovanie koeficientov

Rekapitulácia FIR a IIR filtrov

Výhody ČF:

1. Časová a teplotná stálosť prenosových vlastností
2. Možnosť realizácie číslicových filtrov identických vlastností
3. Možnosť preladovania zmenou diskretizačnej frekvencie
4. Možnosť zmeny prenosu zmenou hodnôt koeficientov prenosovej funkcie
5. Možnosť multiplexnej činnosti
6. Možnosť filtrácie signálov extrémne nízkych frekvencií
7. Možnosť ľahkého zvyšovania presnosti jeho realizácie
8. Hrebeňový charakter frekvenčných charakteristík (niekedy nevýhodná vlastnosť)
9. Číslicové filtre nemajú reaktančné prvky (cievky, kondenzátory), a preto pri ich výrobe **nie sú problémy spojené s presnosťou zhotovenia a stabilitou týchto prvkov.**
10. Môžu sa zhotovovať pomocou integrovaných obvodov. Z tohto vyplýva, že **môžu mať malé rozmery** a ich výroba môže byť ekonomicky výhodná

Nevýhody ČF:

1. Kvantizačný šum
2. Obmedzený frekvenčný rozsah pri vysokých frekvenciách (obmedzená výpočtová schopnosť, dnes už čiastočne vyriešené)
3. Zložitosť realizácie



Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 5

- Aktualizácia
- Realizačná časť syntézy IIR filtrov
- Realizačná časť syntézy FIR filtrov
- Rekapitulácia FIR a IIR filtrov
- **Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie**

Úvod do filtrácie so zmenou vzorkovacej frekvencie

V aplikáciách s vysokou vzorkovacou frekvenciou (veľa vzoriek za krátky čas) je možné, že konvenčný prístup k filtrácii bude s existujúcim hardvérom ťažko realizovateľný (vysoké taktovacie frekvencie môžu predstavovať problém).

Vďaka zmene vzorkovacej frekvencie je možné signály spracovávať tak, že sa rôznymi filtermi vyfiltrujú paralelne s nižšou vzorkovacou frekvenciou.

Tiež môžu masť požiadavky pre zmenu vzorkovacej frekvencie pre zabezpečenie kompatibility rôznych zariadení s rôznym taktom ...

- Číslicové systémy so zmenou vzorkovacej frekvencie (Multirate System) našli uplatnenie medzi algoritmi ČF vzhľadom ku svojej vysokej výpočtovej efektívnosti.
- Tieto algoritmy sú dnes používané v mnohých nových aplikáciách – mnohokanálové systémy kódovania (Subband Coding) zvukových a obrazových informácií, dátové prenosové systémy s viacerými nosnými, realizácia „rýchlych transformácií“ pomocou banky ČF, diskretná waveletova transformácia, a iné.

Zmena vzorkovacej frekvencie môže byť dvojakého typu:

- **podvzorkovanie (decimácia)** - downsampling
- **nadvzorkovanie (interpolácia)** - upsampling

Decimátory a interpolátory sú základné stavebné bloky takýchto systémov a charakterizujeme ich jak v časovej, tak aj vo frekvenčnej oblasti.

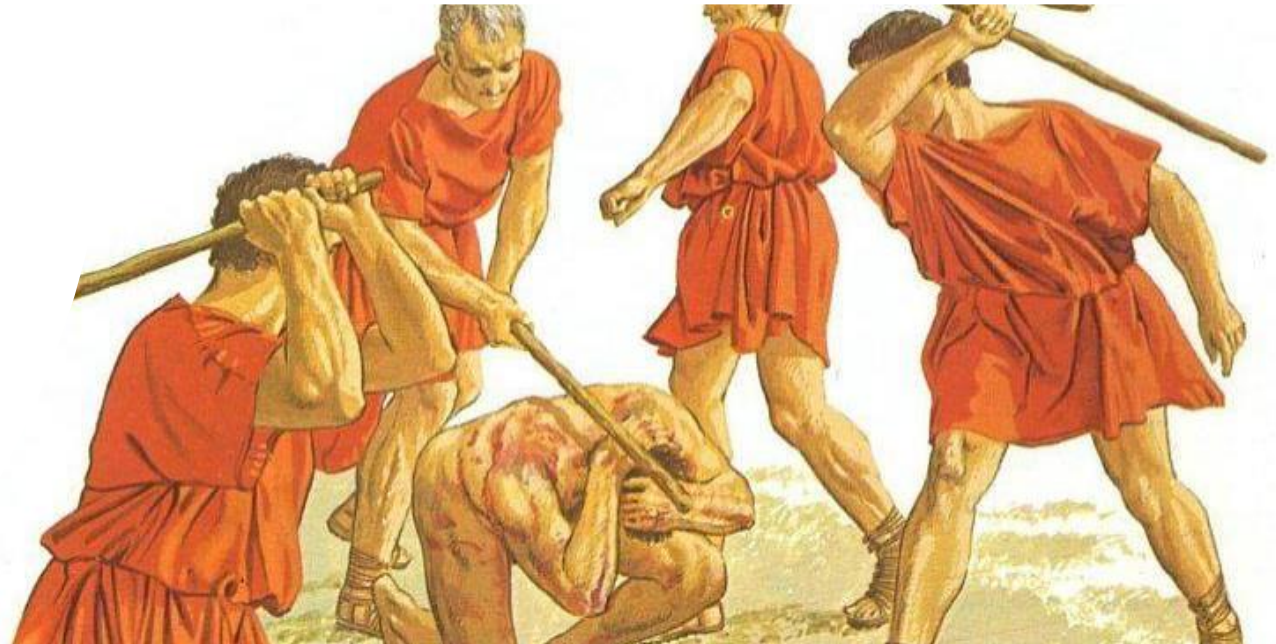
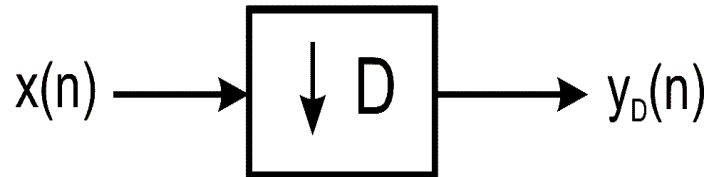
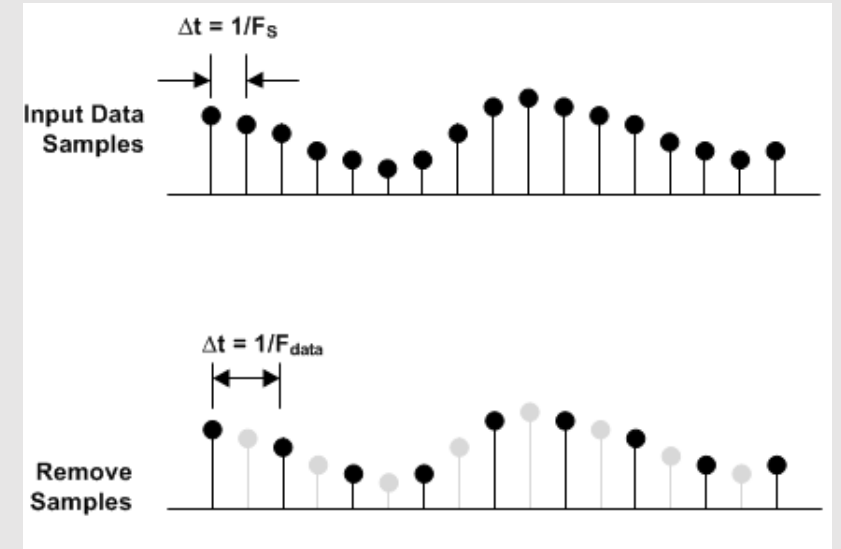
Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia

Decimácia

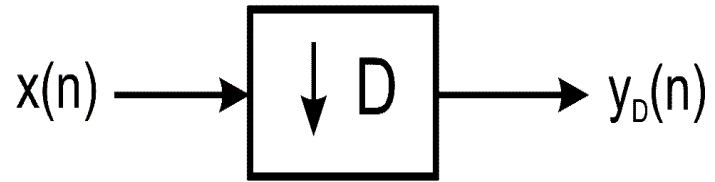
je proces, pri ktorom dochádza k zníženiu počtu vzoriek signálu (Často sa stretávame a s pojmom **podvzorkovanie (downsampling)**).

Pre zaujímavosť:

Pôvod slova **decimácia** (lat: *decimatio*) pramení zo spôsobu potrestania vojska v starovekom Ríme, kedy sa trestaná jednotka rozdelila na skupiny po 10 vojakov. V každej skupine sa potom losovaním určil vojak, ktorý bol zvyšnými deviatimi vojakmi popravený (upalicovaný).



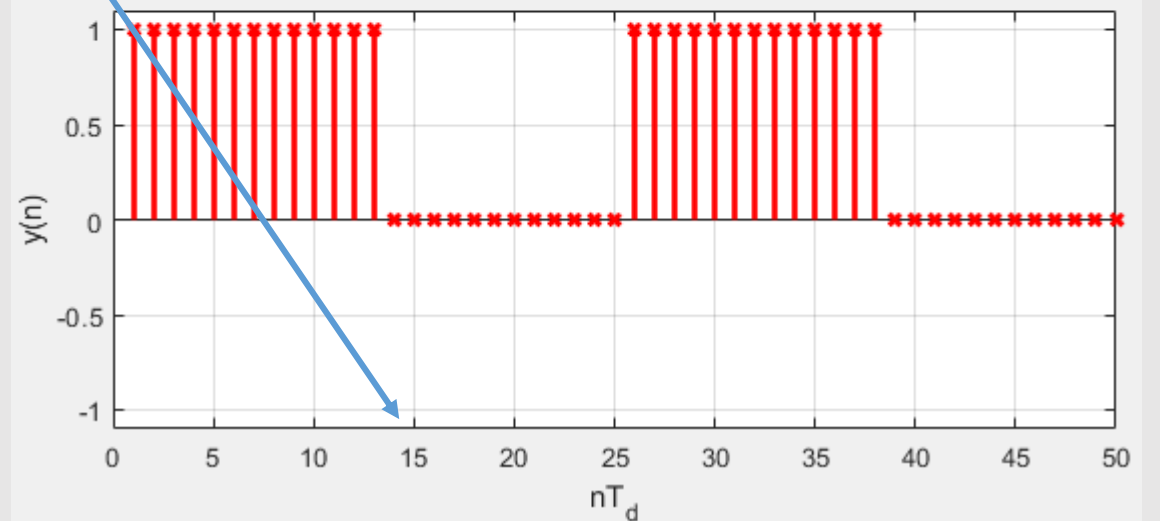
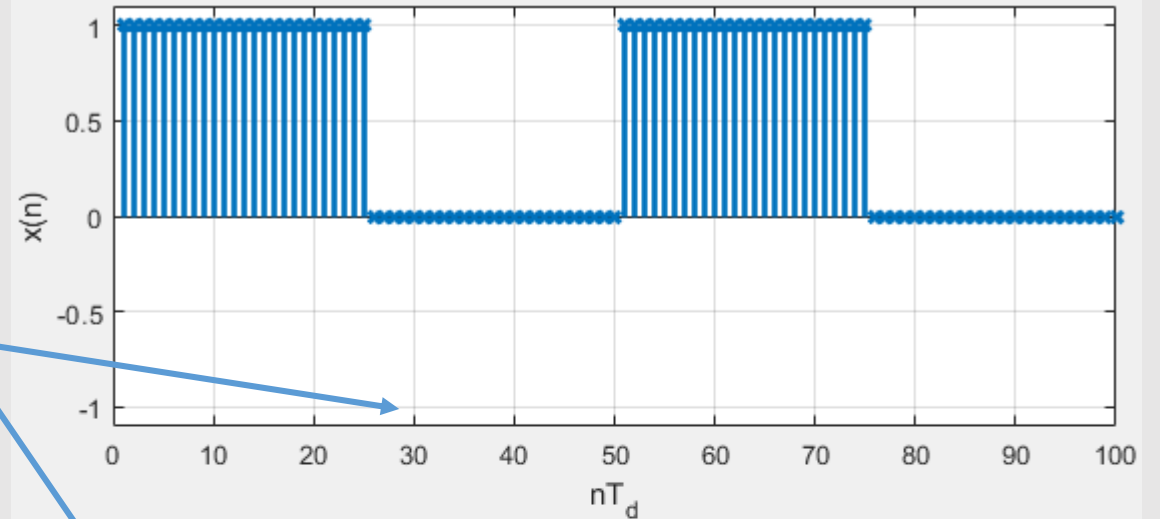
Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia



Decimovaný signál má D násobne menej vzoriek ako signál pôvodný.

Prečo decimovať?

- redukcia objemu vzorkovaných dát – menšie nároky na výpočtový výkon HW
- efektívne využitie šírky pásma – využívame rýchle vzorkovacie obvody (ak je signál je úzkopásmový)



Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia

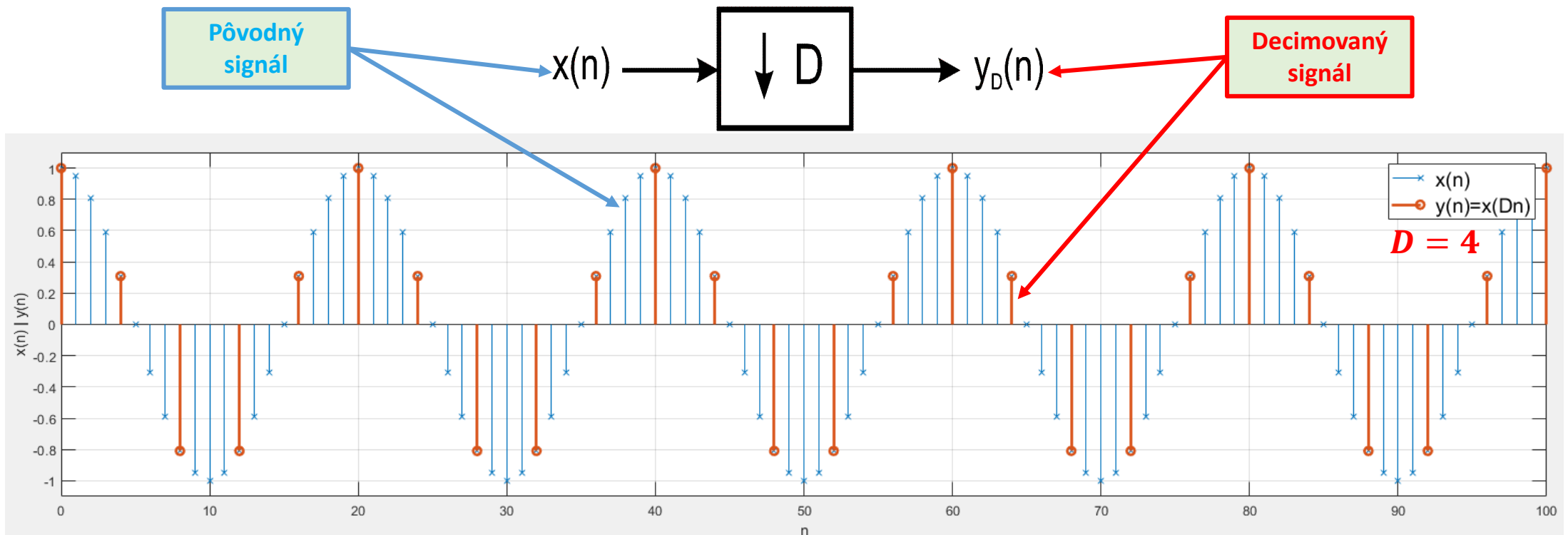
- **Decimácia, podvzorkovanie** (downsampling) - je princíp, ktorým je možné znížiť počet vzoriek signálu (znížiť dátový tok), znížiť vzorkovaciu frekvenciu. (Dochádza k informačnej strate!!!)
- Pri podvzorkovaní s **faktorom decimácie D** sa zo vstupného signálu $x(n)$ vyberá **iba každá D-tá vzorka**, ostatné sú odstránené.

- Pre výstupný signál platí:

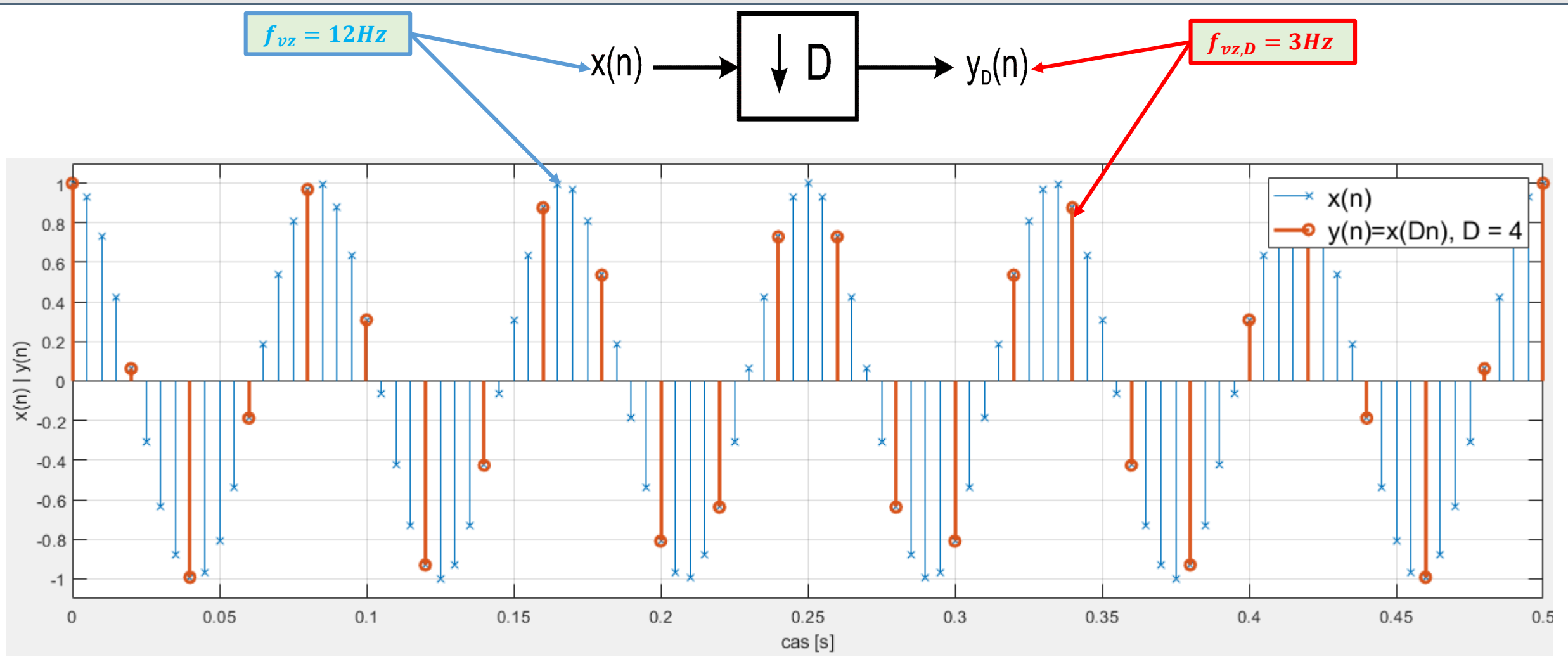
$$y_D(n) = x(nD)$$

- Pre vzorkovaciu frekvenciu platí:

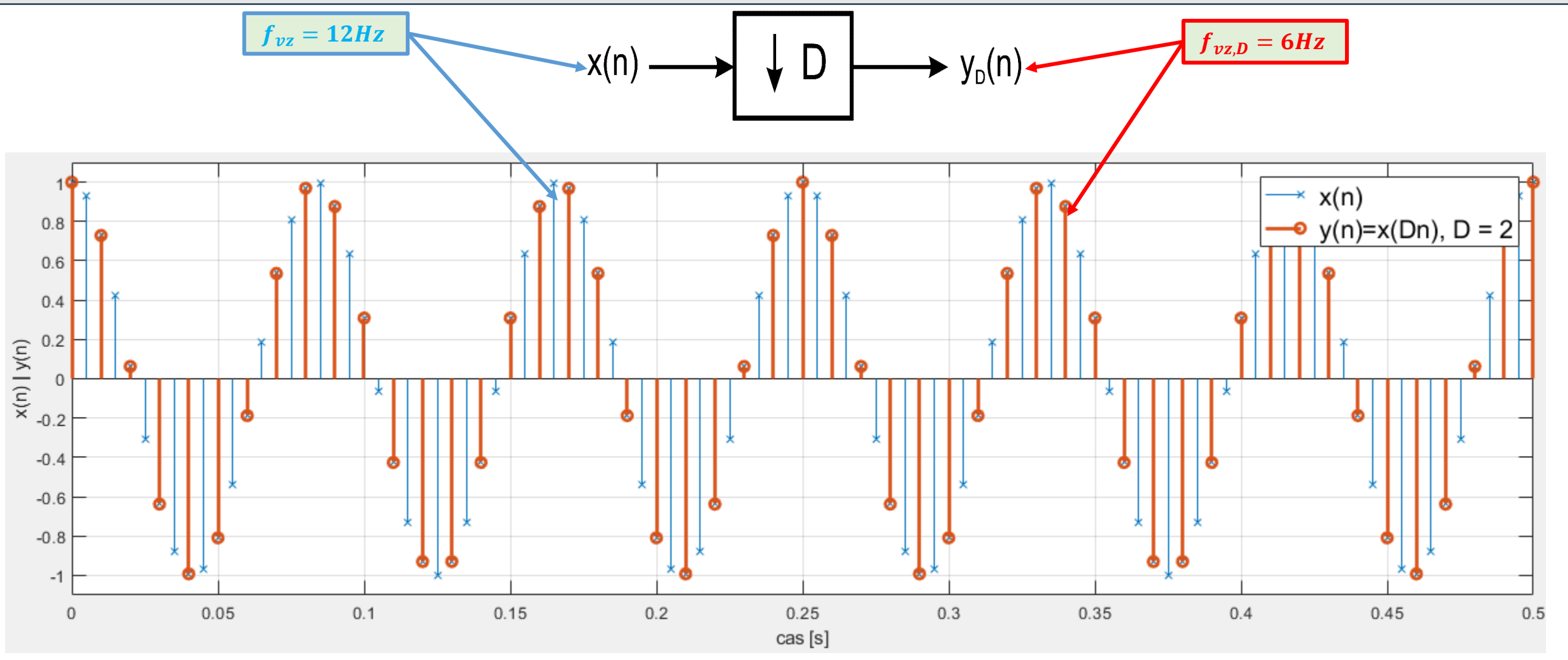
$$f_{vz,D} = \frac{f_{vz}}{D}$$



Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia



Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia



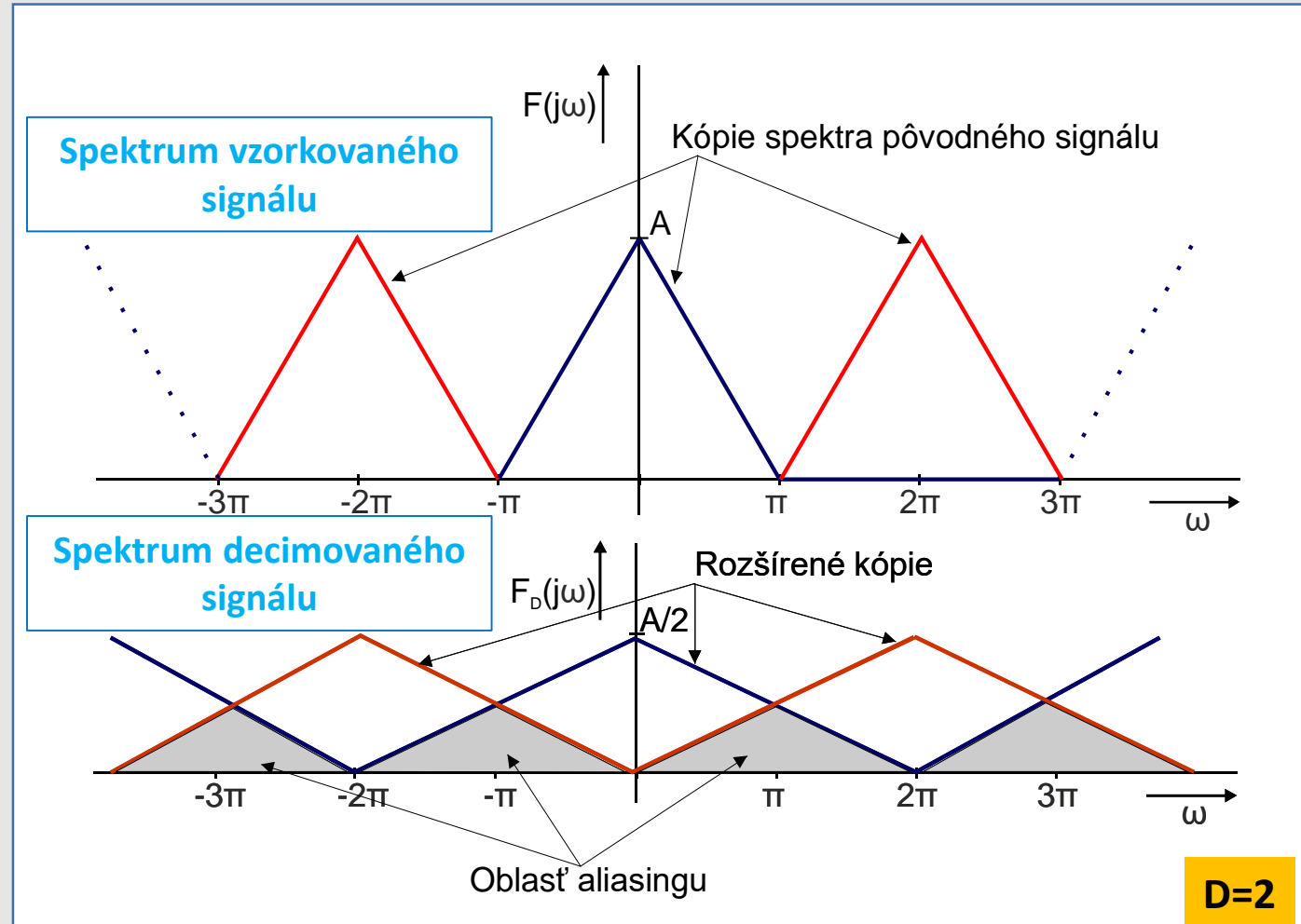
Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia

- Decimácia sa na spektre signálu prejaví jeho rozšírením. – **Kompresii (stlačeniu) v časovej oblasti zodpovedá vždy expanzia (rozťahnutie) vo frekvenčnej oblasti!**
 - Ak uvažujeme diskretný signál, musíme uvažovať, že jeho spektrum je nekonečné a periodické.
- Vzťah medzi $Y_D(e^{j\omega})$ - **spektrom decimovaného signálu** $y_D(n)$ na výstupe decimátora a $X(e^{j\omega})$ - **spektrom vstupného signálu** decimátora $x(n)$ je:

$$Y_D(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{m=0}^{D-1} X(e^{j(\omega - 2\pi m)/D})$$

D-násobne rozťahnutá verzia spektra vstupného diskretného signálu.

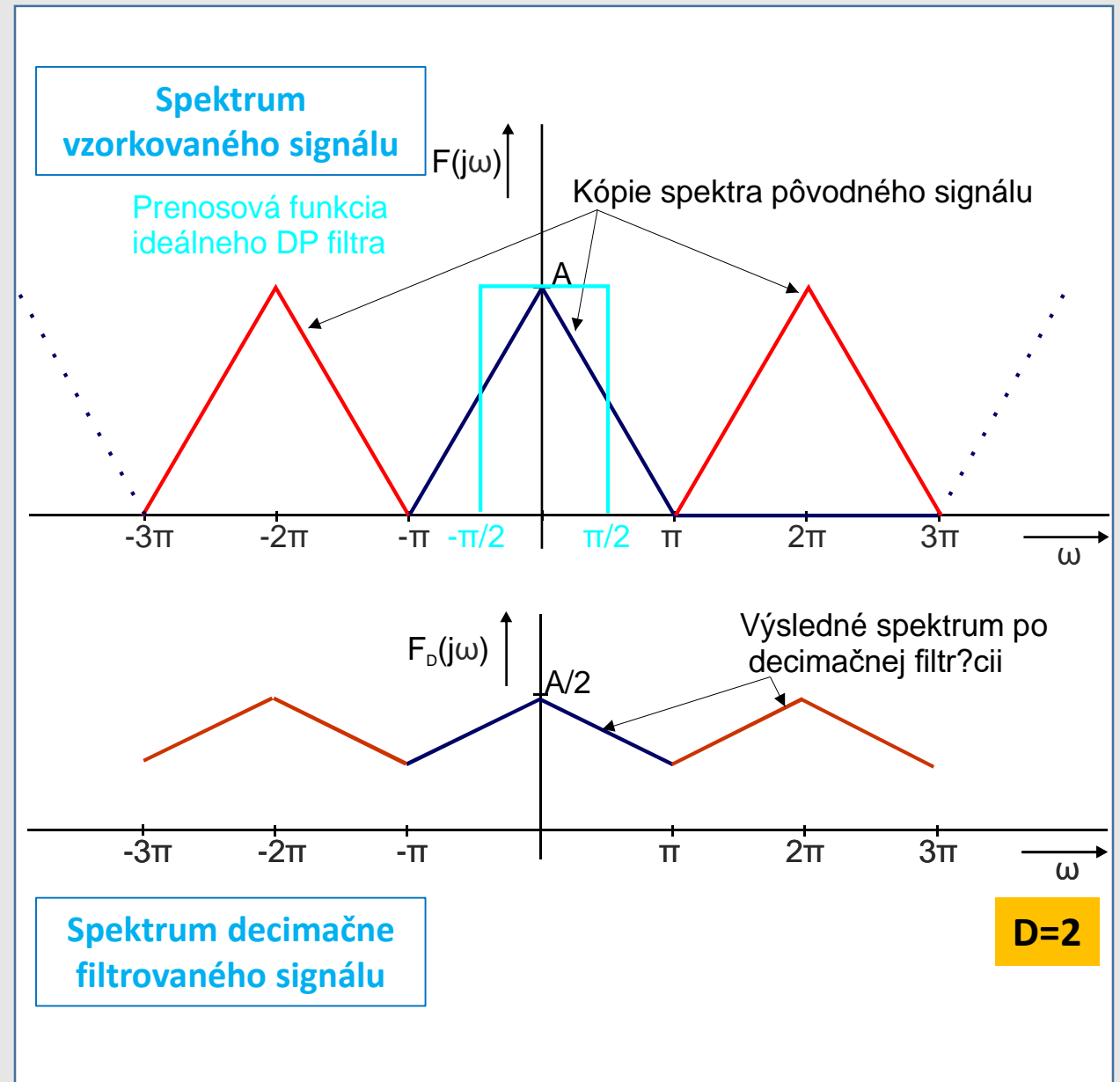
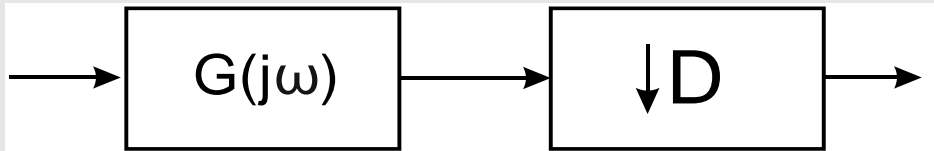
Člen pre $m = 0$ je **D-násobne natiahnutou (rozšírenou) verziou nultého člena pôvodného spektra $X(e^{j\omega})$ (lebo $X(e^{j\omega/D})$), pričom členy pre $m > 0$ sú posunuté verzie tohto rozťahnutého nultého člena.**



Aliasing - prekrývanie spektier. Spektrálne zložky, ktoré sú prekryté, sa sčítajú do výsledného spektra decimovaného signálu.

Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Decimácia

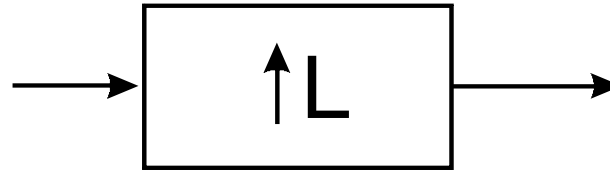
- Decimácia sa na spektre signálu prejaví jeho rozšírením. – **Kompresii (stlačeniu) v časovej oblasti zodpovedá vždy expanzia (roztiahnutie) vo frekvenčnej oblasti!**
 - Ak uvažujeme diskretný signál, musíme uvažovať, že jeho spektrum je nekonečné a periodické.
- **Antialiasingový filter** si pre jednoduchosť môžeme predstaviť ako ideálny filter s medznou frekvenciou tak, ako je uvedené v nasledujúcej rovnici: $\omega = \frac{\pi}{D}$
- V praxi namiesto ideálneho DP filtra môžeme použiť Gaussov alebo iný DP filter
- **Decimátor sa v praxi zapája spolu s filtrom a vzniká decimačný filter.**



Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Interpolácia

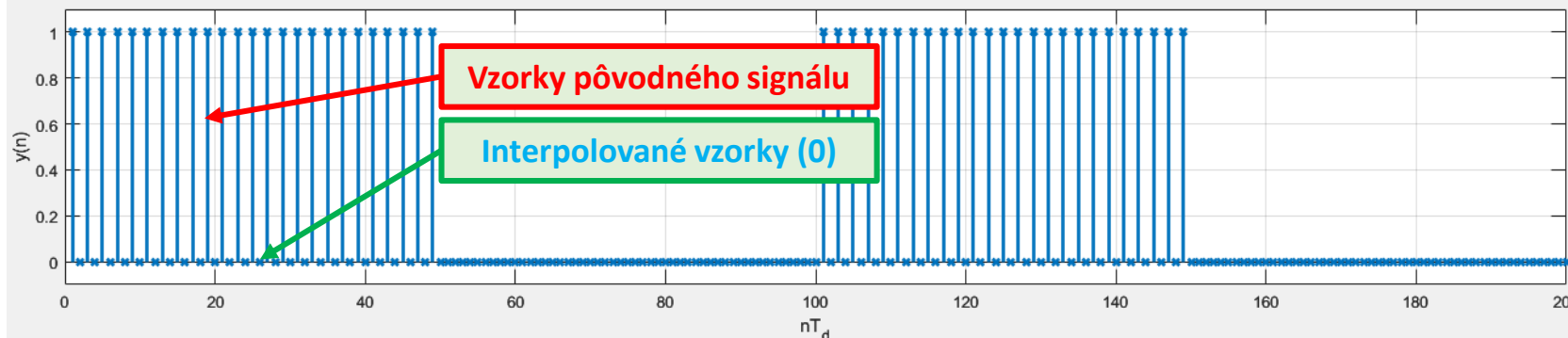
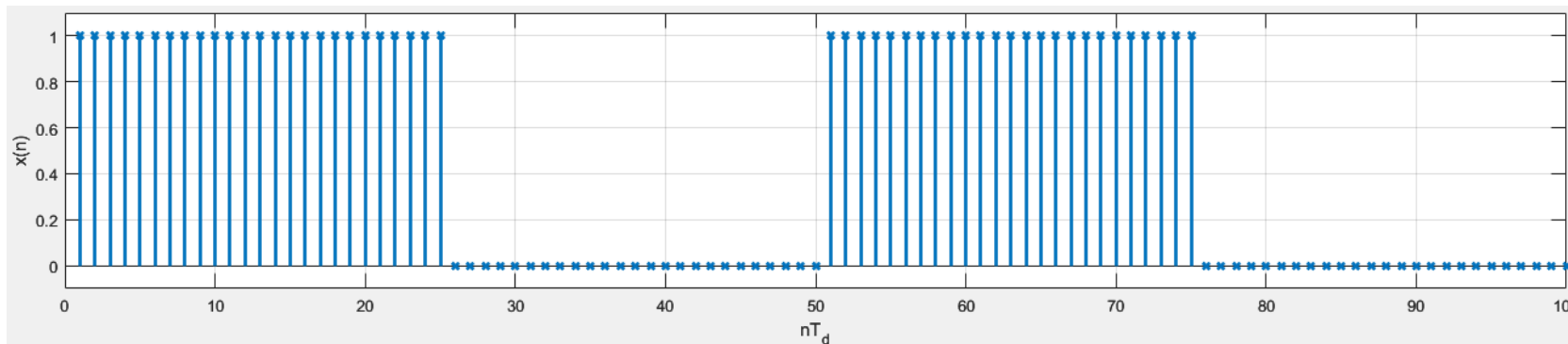
- Interpoláciou je možné zvýšiť priestorové rozlíšenie signálu
- Interpolácia je založená na vkladaní vzoriek s nulovou hodnotou (zero-padding)
- L – interpolačný faktor

$$f_L(n) = \begin{cases} f(n/L), & n \bmod(L) = 0 \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$



- Pre vzorkovaciu frekvenciu platí:

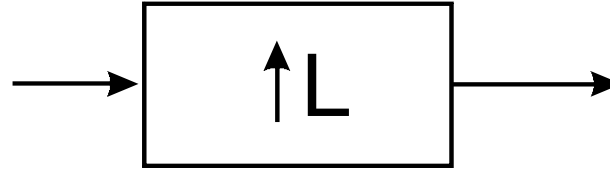
$$f_{vz,L} = L f_{vz}$$



Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Interpolácia

- Interpoláciou je možné zvýšiť priestorové rozlíšenie signálu
- Interpolácia je založená na vkladaní vzoriek s nulovou hodnotou (zero-padding)
- L – interpolačný faktor

$$f_L(n) = \begin{cases} f(n/L), & n \bmod(L) = 0 \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$



- Pre vzorkovaciu frekvenciu platí:

$$f_{vz,L} = L f_{vz}$$

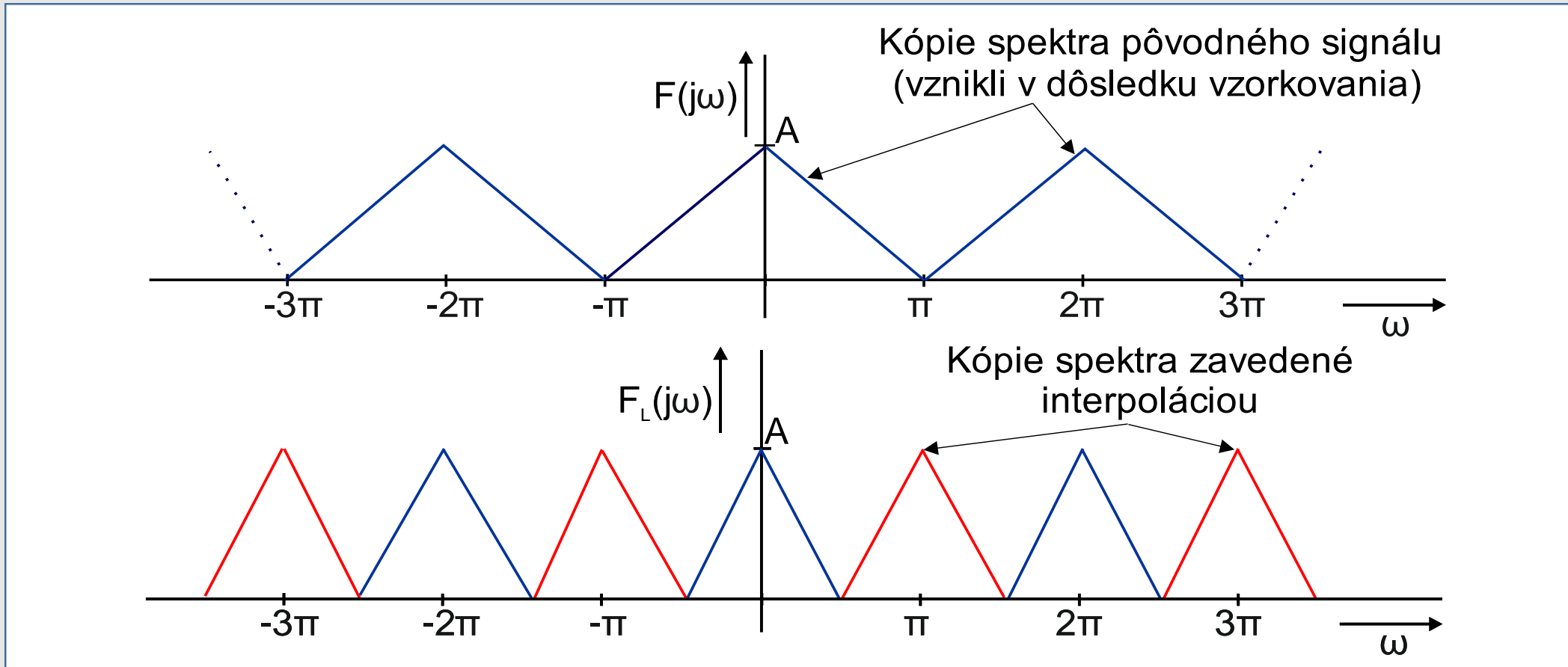
- Vzťah medzi $Y_L(e^{j\omega})$ - spektrom interpolovaného signálu $y_L(n)$ na výstupe interpolátora a $X(e^{j\omega})$ - spektrom vstupného signálu $x(n)$ je:

$$Y_L(e^{j\omega}) = X(e^{Lj\omega})$$

L-násobne stlačená verzia spektra vstupného diskrétného signálu.

- Každá expanzia (rozšíreniu) v časovej oblasti zodpovedá kompresia (stlačenie) vo frekvenčnej oblasti!

Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Interpolácia



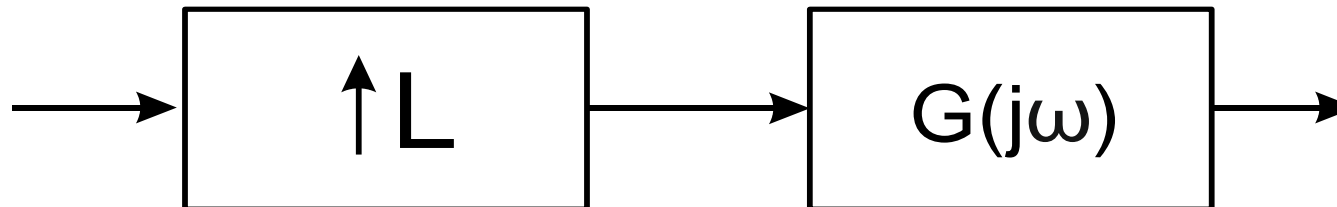
- **Aliasing** môže spôsobiť stratu informácie v dôsledku možného prekrývania sa posunutých verzií roziahnutého pôvodného spektra $X(e^{j\omega})$ - (pri decimácii)
- Na druhej strane **efekt vytvárania kópií nevedie k akejkoľvek strate informácií**, čo je v zhode so skutočnosťou, že v časovej oblasti nedochádza k strate žiadnych vzoriek.

Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Interpolácia

- Interpoláciou je možné zvýšiť priestorové rozlíšenie signálu
- Interpolácia je založená na vkladaní vzoriek s nulovou hodnotou (**zero-padding**)
- **L** – interpolačný faktor

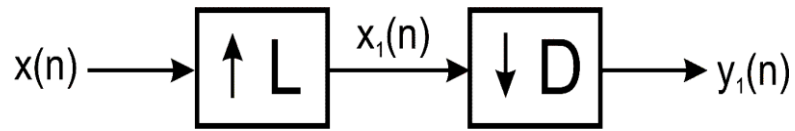
$$f_L(n) = \begin{cases} f(n/L), & n \bmod(L) = 0 \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$

- Pri interpolácii sa za interpolátor zaradzuje DP filter, čím vzniká **interpolačný filter (IF)**. DP filter odstraňuje spektrálne kópie a v obrazovom priestore sa to prejaví rozložením energie nenulových prvkov aj na prvky, ktoré sú nulové. Interpolovaný signál je potrebné zosilniť faktorom L.

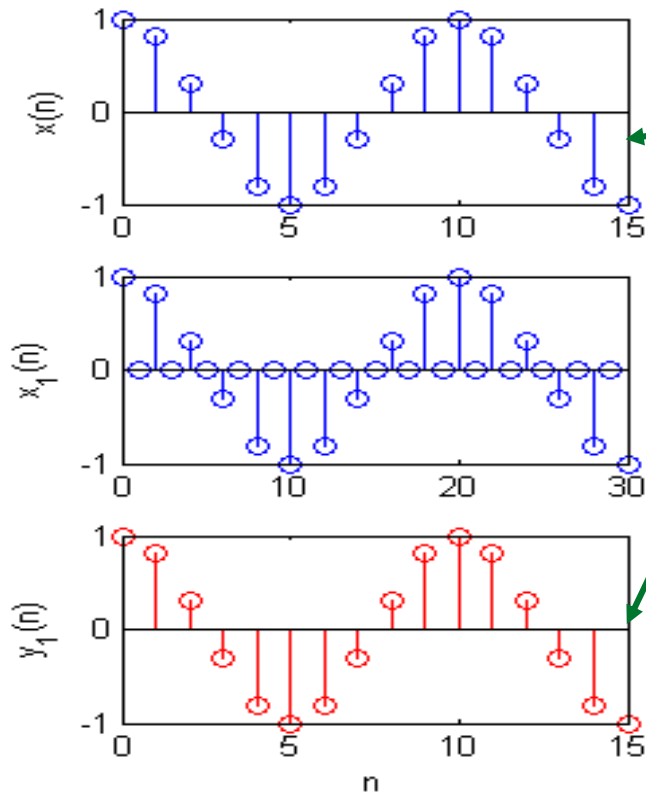


Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Zapojenia decimátorov a interpolátorov

Vo všeobecnosti je decimátor a interpolátor možné zapojiť do kaskády dvojakým spôsobom. Tieto dve zapojenia nie sú zameniteľné, t.j. nie sú ekvivalentné. (Např. nech $L = D$)

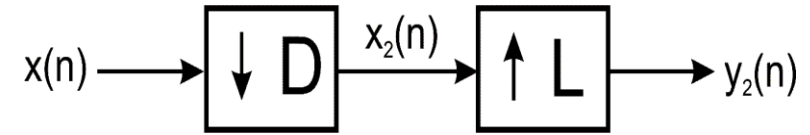


a): $x(n), x_1(n), y_1(n)$

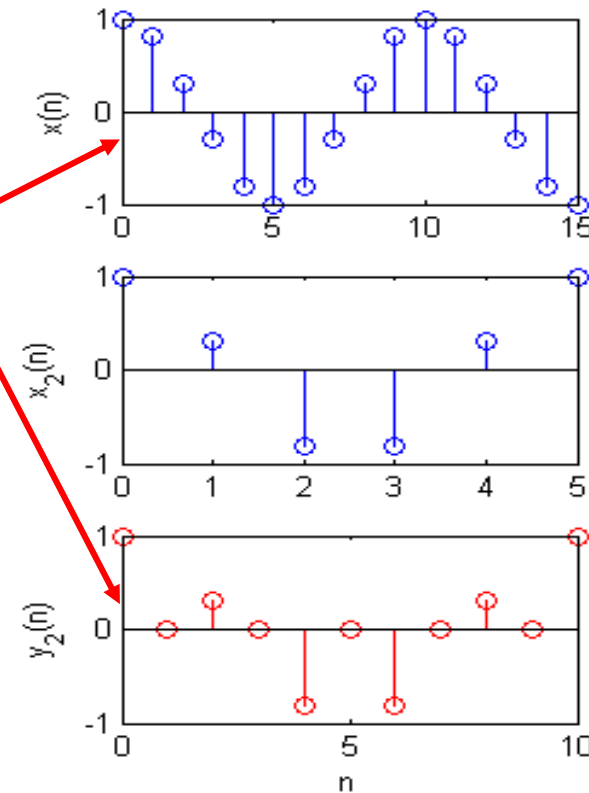


$x(n) = y_1(n)$

$x(n) \neq y_2(n)$



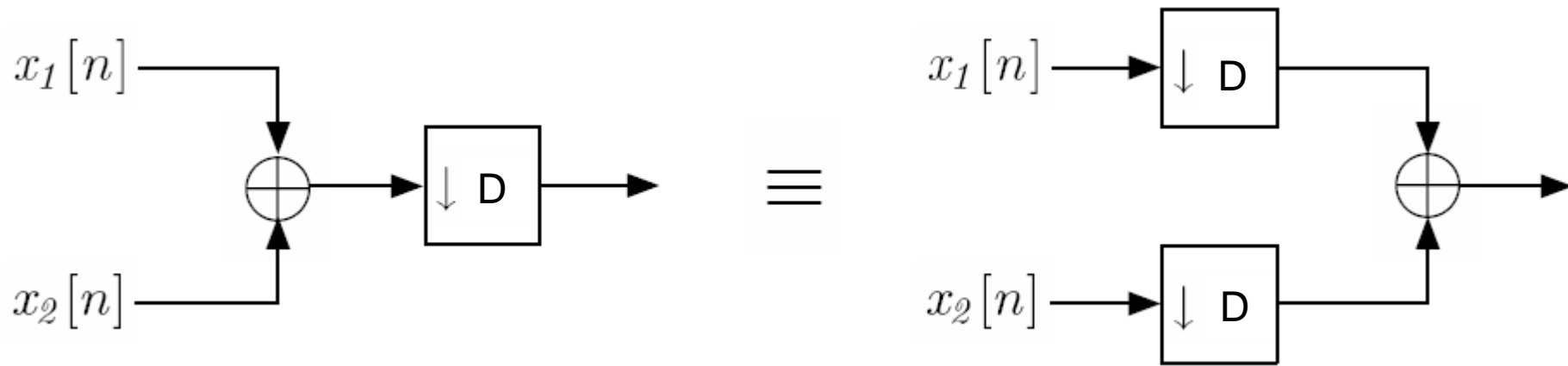
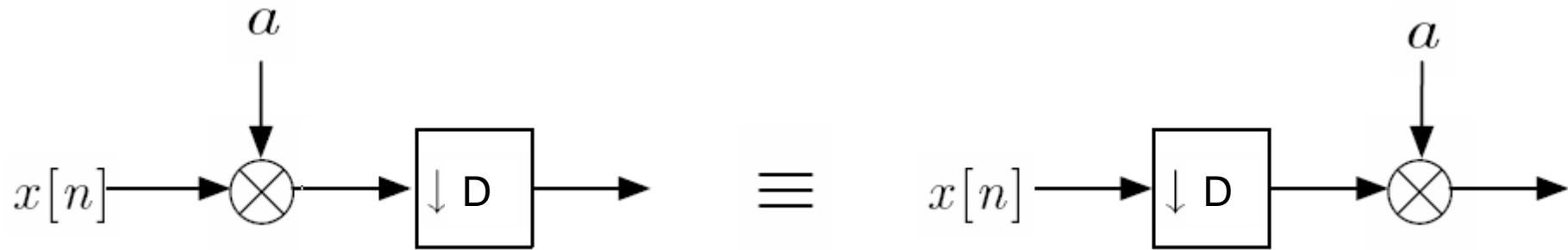
b): $x(n), x_2(n), y_2(n)$



Spôsobuje stratu $D - 1$ z D vzoriek

Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Zapojenia decimátorov a interpolátorov

Triviálne komutatívne pravidlá:

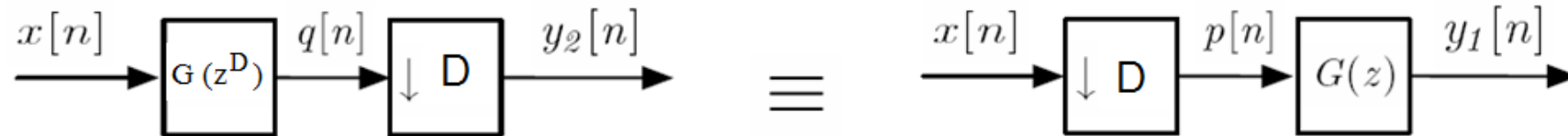


Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Zapojenia decimátorov a interpolátorov

Ekvivalentné zapojenia pre mnohokanálové diskkrétne sústavy

Zapojenie decimátora s filtrom s prenosovou funkciou $G(z)$

Možno dokázať, že kaskáda vľavo je ekvivalentná kaskáde za predpokladu, že $G(z)$ je racionálne lomená prenosová funkcia



Pre zapojenia interpolátora s filtrom ekvivalencia platí tiež.



Racionálne lomená funkcia

Je každá funkcia tvaru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy a definičný obor tejto funkcie je: $DF: \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$

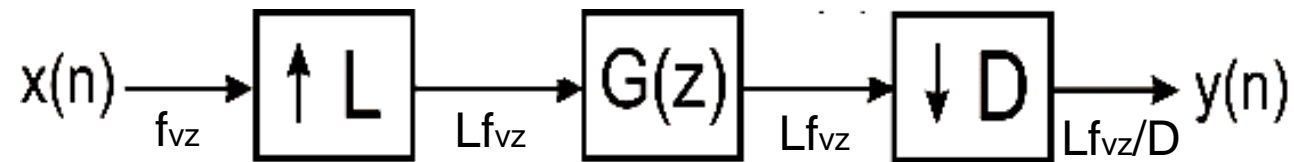


Úvod do filtrácie so zmenou vz. frekv. – Zapojenia decimátorov a interpolátorov

Zmena vzorkovacej frekvencie v pomere racionálneho (neceločíselného) faktora L/D

Ak diskretný signál $x[n]$ je vzorkovaný na intervale T_1 a prajeme si získať signál $y[n]$ vzorkovaný na intervale T_2 , potom túto operáciu umožňujú metódy interpolácie a decimácie, poskytujúc pomer T_1/T_2 , ktorý je **racionálne číslo**, tj. L/D . Každé racionálne číslo je možné previesť na podiel dvoch celých čísel L/D a tento pomer vyjadruje operáciu **nadvzorkovania L** a **podvzorkovania D** radené do kaskády. Pokiaľ je možné nájsť najväčší spoločný deliteľ čísel L a D , je vhodné ním oba činitele podeliť.

Spojenie interpolácie a decimácie do kaskády, je možné zvyšovať a znižovať vzorkovaciu frekvenciu v systéme a to v pomere L/D .



Interpolácia by sa mala vykonať ako prvá a decimácia ako druhá, aby sa zachovali požadované spektrálne charakteristiky signálu $x[n]$.

Redukcia vzorkovacej frekvencie s neceločíselným faktorom má často za následok kompresiu údajov (počtu vzoriek) bez straty informácie.

Zmenu vzorkovacej frekvencie je možné využiť napríklad vtedy, ak vznikne **požiadavka spracovať záznam signálu digitalizovaného za použitia istej vzorkovacej frekvencie v zariadení, ktoré používa inú hodnotu vzorkovacej frekvencie**. Zmena vzorkovacej frekvencie pomocou číslicových metód je v takom prípade omnoho výhodnejšia ako prevod do analógovej podoby a nové vzorkovanie s požadovanou vzorkovacou frekvenciou.

Ďakujem za pozornosť!

Nabudúce:

- Mnohokanálové diskkrétne systémy

