Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 2

- **Filtrácia – úvod k diskrétnemu spracovaniu signálov**
- Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)
- Časové charakteristiky ČF

doc. Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Filtrácia - úvod

Filtrácia

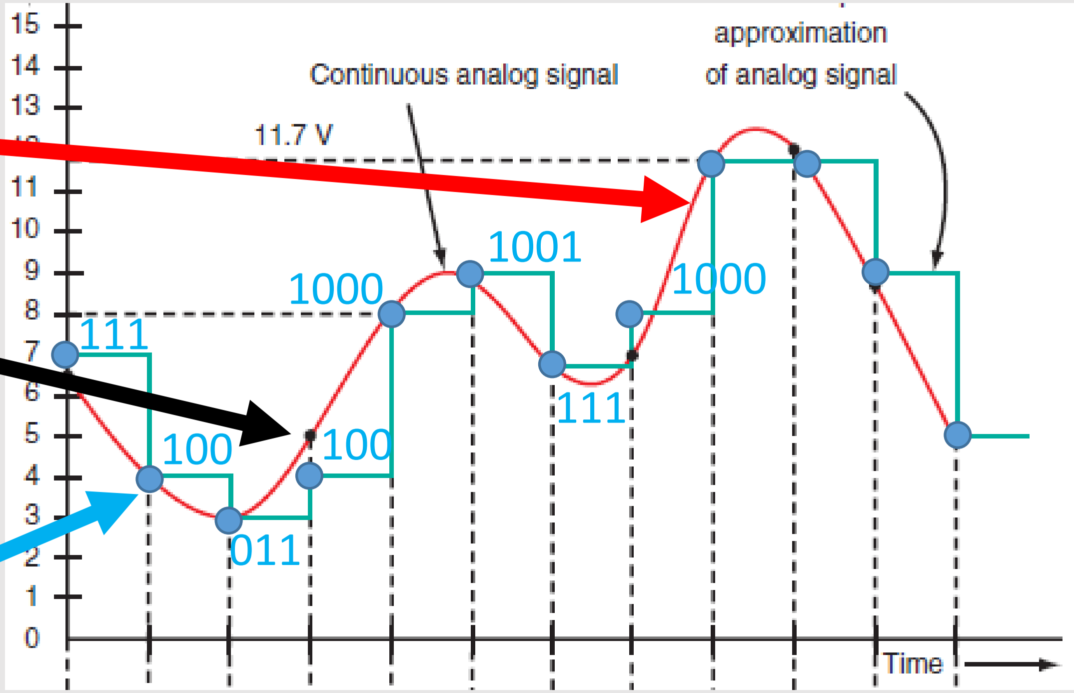
- Filtrácia je vo všeobecnosti proces, ktorý predstavuje spracovanie signálu, slúži k výberu jeho určitých zložiek (užitočný signál) a k potlačeniu iných, nechcených zložiek (napr. šum)
- Ak sa vyberú len určité zložky signálu – pásmovo priepustné filtre (priepuste)
- Ak sa odfiltrujú nechcené zložky signálu – dolno/horno priepustné filtre
- V elektrotechnike filtrácia slúži na zmenu spektra výstupného signálu, tj. odstránenie jednej či viacerých rušivých frekvenčných zložiek zo spektra.

Spracovávať môžeme signál analógový alebo číslicový.

Analógový signál (spojitý v čase) – rozumieme tým reálnu funkciu jednej reálnej premennej.

Diskrétny signál – rozumieme signál diskrétny v čase a nekvantovaný v úrovni, ktorý získame diskretizáciou (vzorkovaním) analógového signálu.

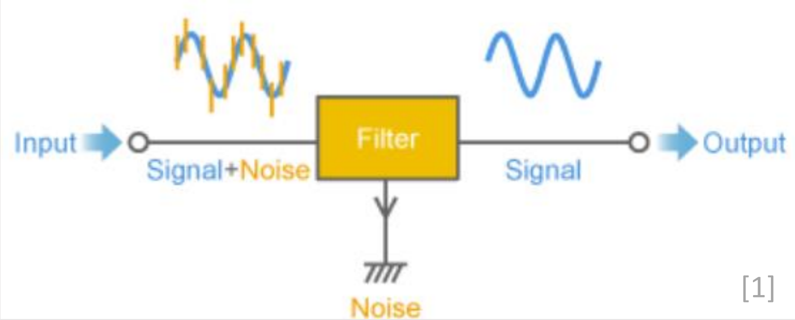
Číslicový signál – rozumieme signál diskrétny v čase a kvantovaný v úrovni s priradením kódových slov jednotlivým kvantizačným úrovniam.

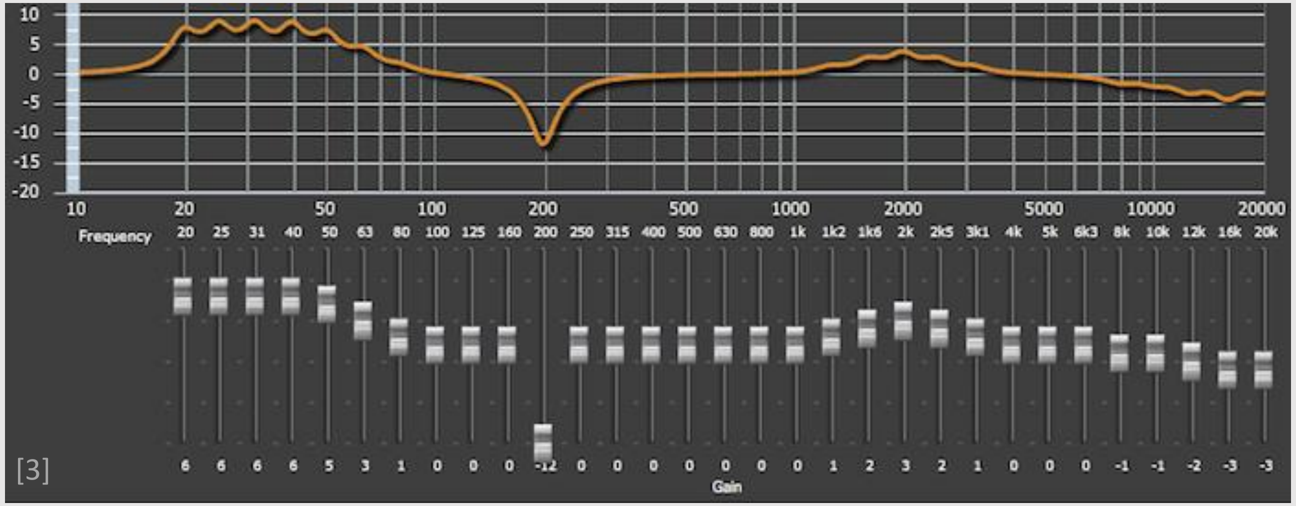


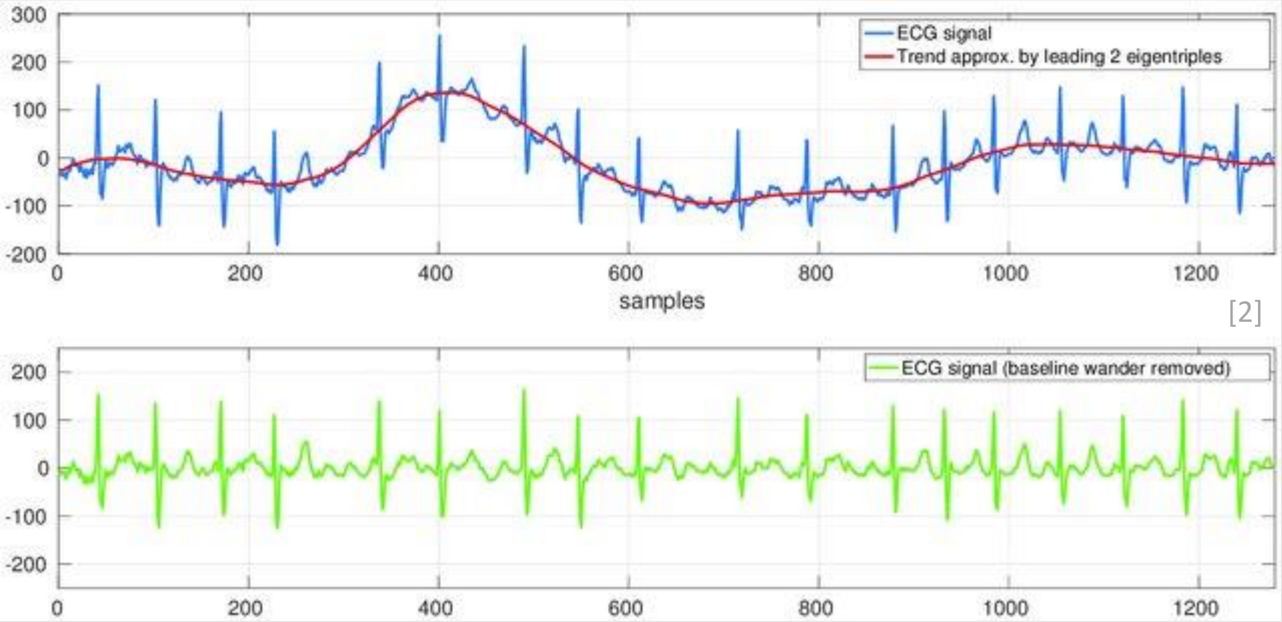
Filtrácia - úvod

Príklady filtrov

- **Potlačenie šumu** - rádiové signály, videosignály, bioelektrické signály, zvukové signály
- **Zvýraznenie frekvenčných pásiem** – grafický ekvalizér (výšky, hĺbky), zvukové efekty (ozvena), zaostrenie obrázkov (hrany, ostré prechody), zvýraznenie vysokých frekvencií, ...
- **Obmedzenie prenosového pásma v komunikačných kanáloch -** ADSL, rozhlasové a TV vysielanie, ...
- **Potlačenie/odstránenie špecifických frekvencií** (blokovanie jednosmernej zložky, potlačenie rušenia zo siete 50/60 Hz)
- **Špeciálne operácie** – integrácie, diferenciácie, ...







[1] https://www.murata.com/en-us/products/emc/emifil/library/knowhow/basic/chapter06-p1
[2] https://www.mdpi.com/2227-7080/6/1/26
[3] https://www.minidsp.com/applications/dsp-basics/peq-vs-graphic-eq

Filtrácia – Prečo digitálne?

S pokrokom číslicovej techniky sa filtre ako také vyvinuli z jednoduchých pasívnych elektronických súčiastok (R, L, C) na filtre, ktoré sú veľmi často riešené softvérovo.

Filtre podľa realizácie a spojitosti v čase rozdeľujeme na:

- analógové (spojité) filtre (AF)
- číslicové (diskrétne) filtre (ČF)

Vlastnosti AF:

- aplikácia iba na signály spojité v čase
- realizácia pomocou operačných zosilňovačov, rezistorov a kondenzátorov.
- teoreticky nekonečný frekvenčný rozsah (prakticky max. GHz – mikrovlnné súčiastky)

Nevýhody AF:

- citlivé na šum,
- menšia presnosť
- nelineárna fáza
- obmedzený dynamický rozsah
- zlá výrobná reprodukovateľnosť

Vlastnosti ČF:

- vysoká presnosť, rýchlosť
- aplikácia na signály diskrétne v čase
- implementácia pomocou aritmetických operácii (+, x, posun)
- vysoko lineárne (až na kvantizačný šum)
- flexibilná softvérová implementácia (možná zmena parametra za behu filtra)
- perfektná reprodukovateľnosť
- takmer neobmedzený dynamický rozsah

Nevýhody ČF:

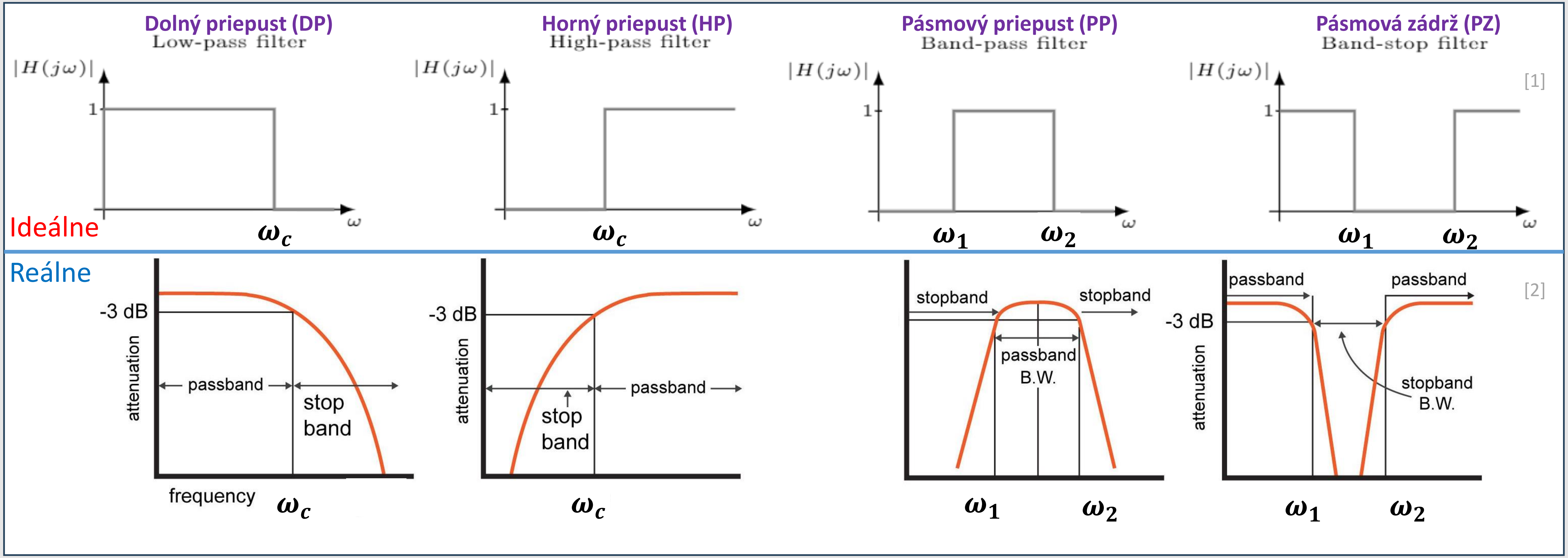
- frekvenčný rozsah je daný vzorkovacou frekvenciou
- vyžaduje A/D a D/A pre kontakt s reálnym svetom

$$f_{filt} \leq \frac{f_{vzor}}{2}$$

Filtrácia – Prečo digitálne?

AF a ČF - rozdelenie podľa prenášaného frekvenčného pásma

- Poznáme štyri druhy filtrov.
- Filtre môžeme tiež deliť na **ideálne** a **reálne** (realizovateľné)



[1]https://www.researchgate.net/publication/354945740_Harmonic_Analysis_of_Social_Cognition
[2] https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-filters/

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 2

- Filtrácia – úvod k diskrétnemu spracovaniu signálov
- **Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)**
- Časové charakteristiky ČF

doc. Ing. Ondrej Kováč, PhD.

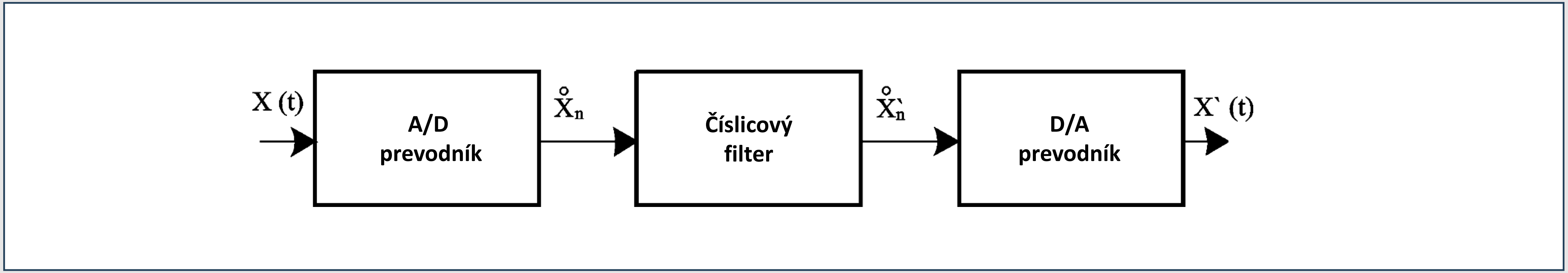
Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Číslicový filter – diskrétna sústava, realizuje proces filtrácie diskrétnych signálov, pri ktorom sa mení spektrum vstupného diskrétneho signálu.

- ČF je možné popísať:
  - prenosom (tj. prenosovou funkciou),
  - frekvenčnou charakteristikou,
  - impulzovou odozvou
  - diferenčnou rovnicou.

- ČF môže byť realizovaný špeciálnym obvodom alebo programovým vybavením počítača. Teda, implementácia algoritmu číslicovej filtrácie môže byť vytvorená technickými alebo programovými prostriedkami.

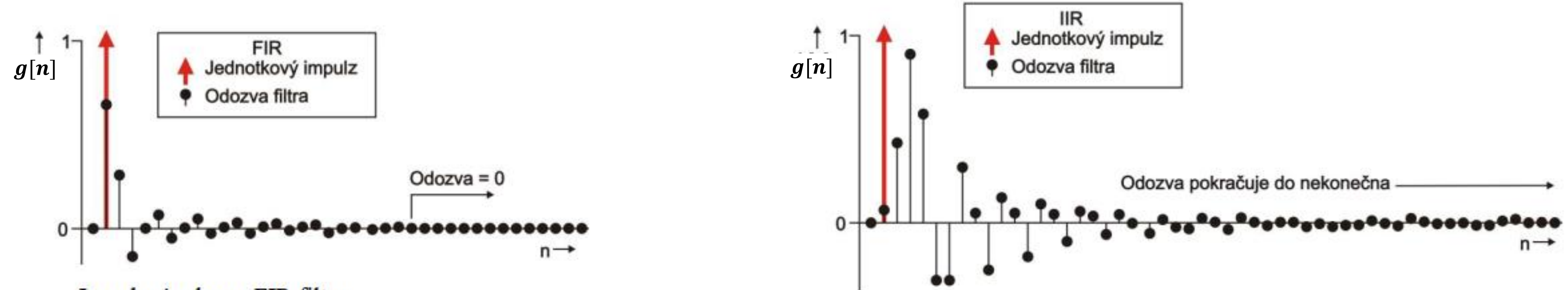
- ČF nadväzujú na analógové filtre a je ich možné navrhovať buď priamo (FIR), alebo prevedením z analógového prototypu (IIR).



Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Rozdelenie ČF:

- s nekonečnou impulznou odozvou - **IIR** (Infinite Impulse Response)
- s konečnou impulznou odozvou - **FIR** (Finite Impulse Response)



Impulzná odozva FIR filtra

Impulzná odozva IIR filtra

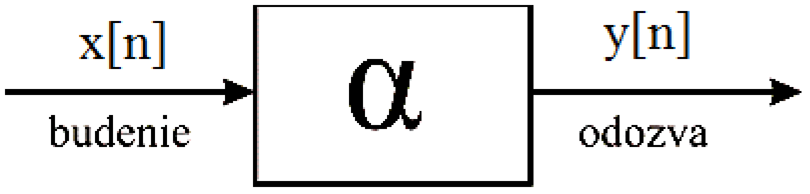
Iné rozdelenie ČF:

- nerekurzívne (bez spätnej väzby) – to sú FIR filtre
- rekurzívne (so spätnou väzbou) – IIR filtre

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Uvažujeme

- ČF s prvkami so sústredenými parametrami, ktoré sú neparametrické a časovo invariantné
  - $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ vstupný diskrétny signál (budenie ČF)
  - $\mathbf{y}[\boldsymbol{n}]$ výstupný diskrétny signál (odozva ČF)



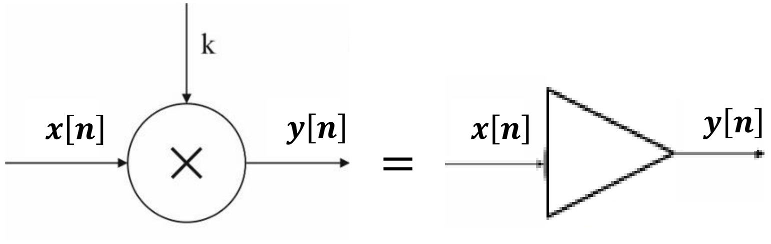
$$x[n] \xrightarrow{\alpha} y[n]$$

Prvok so sústredenými parametrami - jeho **geometrické rozmery sú zanedbateľné voči vlnovej dĺžke signálov** ním prechádzajúcich.

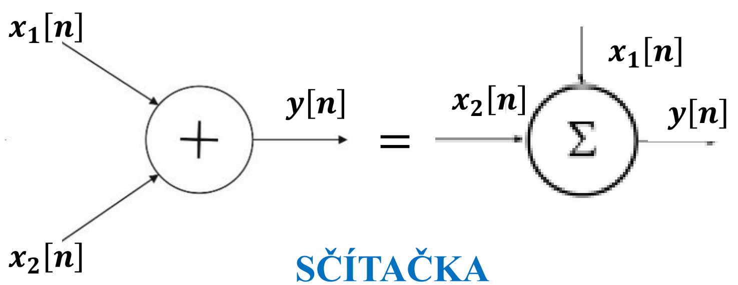
Parametrické sústavy – tie, ktoré majú **aspoň jeden prvok s parametrom závislým od niektorej fyzikálnej veličiny** (napätie, prúd, teplota a pod.).

Stacionárne (časovo invariantné sústavy) – **štruktúra a parametre prvkov sa s časom nemenia.**

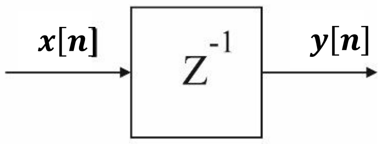
Základné bloky ČF:



NÁSOBIČKA

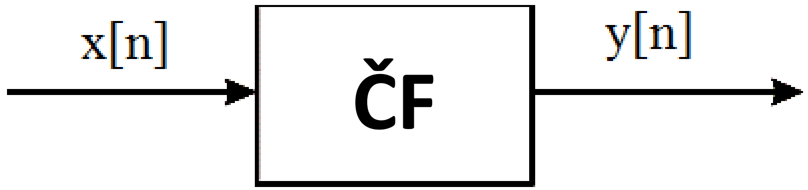


SČÍTAČKA



ONESKOROVACÍ ČLEN

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)



Základné vlastnosti ČF:

1. **Linearita** – princíp superpozície a proporcionality:

Ak platí :

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] \text{ a } x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$$

potom:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

2. Časová invariancia - systém nemení svoje chovanie v čase

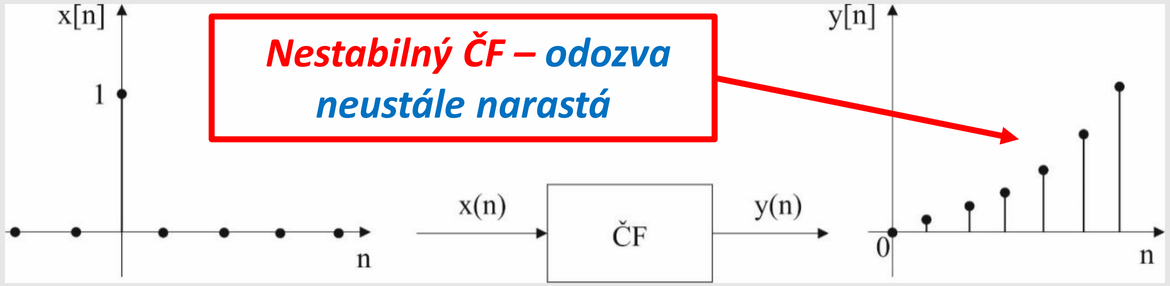
Ak platí :

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

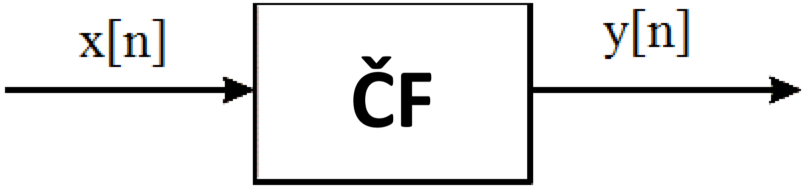
potom:

$$x[n - n_0] \longrightarrow y[n - n_0]$$

3. Stabilita – obmedzený vstup $x[n]$ s konečnou amplitúdou (napr. $|x[n]|_{max} \leq A$) produkuje obmedzený výstup $y[n]$ s konečnou amplitúdou ($|y[n]|_{max} \leq B$).



Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)



Základné vlastnosti ČF:

1. **Linearita** – princíp superpozície a proporcionality:

Ak platí :

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] \text{ a } x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$$

potom:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

2. Časová invariancia - systém nemení svoje chovanie v čase

Ak platí :

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

potom:

$$x[n - n_0] \longrightarrow y[n - n_0]$$

3. Stabilita – obmedzený vstup $x[n]$ s konečnou amplitúdou (napr. $|x[n]|_{max} \leq A$) produkuje obmedzený výstup $y[n]$ s konečnou amplitúdou ($|y[n]|_{max} \leq B$).

4. Kauzalita - reaguje iba na **aktuálny** a **minulý** vstup

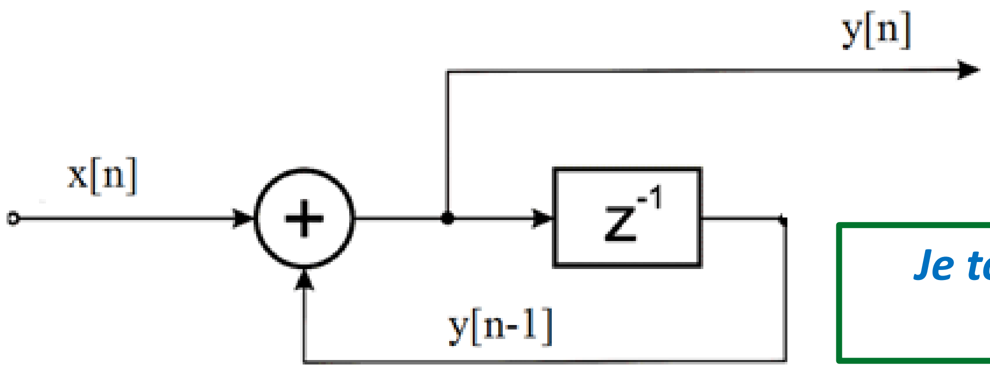
napr.

$$y[n] = x[n] + x[n - 1]$$

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Pod pojmom rad filtra budeme rozumieť počet oneskorovacích členov!

- uvažujme jednoduchý filter, ktorý obsahuje jednu sčítačku a jeden oneskorovací člen

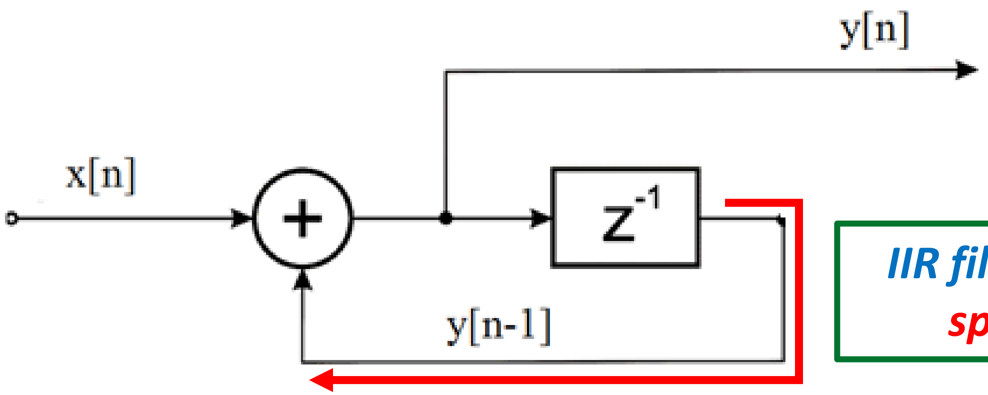


Je to IIR alebo FIR filter?

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Pod pojmom rad filtra budeme rozumieť počet oneskorovacích členov!

- uvažujme jednoduchý filter, ktorý obsahuje jednu sčítačku a jeden oneskorovací člen



$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

IIR filter nakoľko má spätnú väzbu!

Diferenčná rovnica

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Popis ČF (diskrétnej) časovej oblasti:

- **diferenčnými rovnicami**

  diferenčné rovnice môžeme zobraziť a **riešiť pomocou** funkcionálnych transformácií postupnosti, v teórii diskrétnych sústav je najpoužívanejšia **Z-transformácia**.

Popis ČF vo frekvenčnej oblasti:

- Popis diskrétnych signálov a sústav pomocou funkcie komplexnej premennej „z“, tzv. Z-transformácie

Obraz (spektrum) postupnosti $x[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Symbolický zápis:

- Priama transformácia

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$

- Spätná transformácia

$$X(z) \xrightarrow{Z^{-1}} x[n]$$

Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Popis ČF vo frekvenčnej oblasti:

- Popis diskrétnych signálov a sústav pomocou funkcie komplexnej premennej „z“, tzv. Z-transformácie

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

Symbolický zápis:

- Priama transformácia

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

- Spätná transformácia

$$X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x[n]$$

Hlavné vlastnosti Z transformácie, ktoré sú využívané v ČSS:

1) Linearita

Ak

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)$$
$$x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

potom

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z)$$

2) Oneskorenie signálu

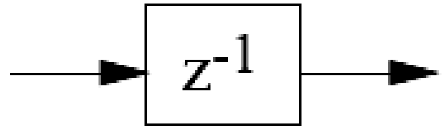
Ak

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

potom

$$x_1[n-k] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)\, z^{-k}$$

$$x[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)\, z^{-1}$$



Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)

Popis ČF vo frekvenčnej oblasti:

- Popis diskrétnych signálov a sústav pomocou funkcie komplexnej premennej „z“, tzv. Z-transformácie

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

Symbolický zápis:

- Priama transformácia

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

- Spätná transformácia

$$X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x[n]$$

Hlavné vlastnosti Z transformácie, ktoré sú využívané v ČSS:

1) Linearita

Ak

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

potom

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z)$$

2) Oneskorenie signálu

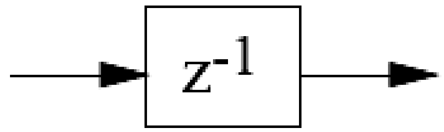
Ak

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

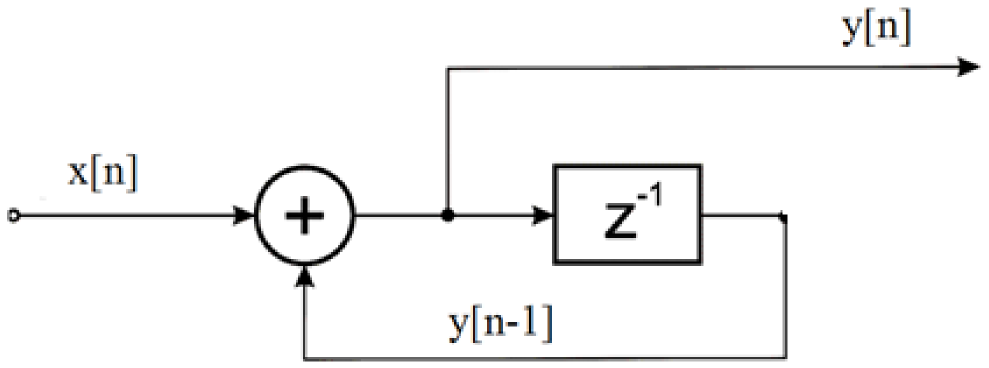
potom

$$x_1[n-k] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X_1(z)\, z^{-k}$$

$$x[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)\, z^{-1}$$



Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)



$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Diferenčná rovnica

Vo všeobecnosti je diskrétna sústava opísaná **lineárnou diferenčnou rovnicou M-tého radu s pravou stranou**:

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k]$$

Za predpokladu **nenulových** začiatočných podmienok sa riešenie tejto rovnice skladá z 2 častí:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

vlastné kmity ČF - odpoveď ČF bez budiaceho signálu („harmonické" postupnosti)

vnútená odozva – odpoveď ČF na známy vstupný signál

Diskrétna sústava – vlastné kmity a stabilita

$y_1[n]$- riešenie lineárnej diferenčnej rovnice bez pravej strany:

Hľadanie odozvy ČF bez budiaceho signálu, t.j. x[n]=0

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y[n-k] = 0$$

- Riešenie pomocou tzv. ***charakteristickej rovnice***, ktorú dostaneme **použitím Z transformácie** pre y[n] rôzne od nuly

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y[n-k] \overset{Z}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{M} b_k Y(z) z^{-k} = b_0 z^0 Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)} Y(z) + b_M z^{-M} Y(z) = 0$$

kde b_i - konštanty, z – komplex. premenná, M – celé číslo, Y(z) – Z transformácia y[n] teda: $Y(z) = Z\{y[n]\}$

Ak b_0 až b_M sú rôzne od nuly, charakteristická rovnica **bude mať všeobecne M koreňov** $z_1, z_2, z_3 \ldots z_M$. Tieto korene môžu byť reálne jednoduché, viacnásobné alebo komplexne združené.

Riešenie v časovej oblasti bude:

$$y_1[n] = \sum_{k=1}^{M} c_k\, z_k^n$$

c_k - *konštanty určené z počiatočných podmienok.*

Komplexné korene je možné vyjadriť v tvare:

$$z_i = r_i e^{j\omega_i}$$

modul komplex. čísla

argument komplex. čísla

$y_1[n]$ *fyzikálne* predstavuje tzv. vlastné kmity ČF, ktoré sú „harmonické“ postupnosti:

- **s rastúcou** amplitúdou (ak $r_i > 1$),
- **s klesajúcou** amplitúdou (ak $r_i < 1$) alebo
- **s konštantnou** amplitúdou (ak $r_i = 1$).

Diskrétna sústava – vlastné kmity a stabilita

Ak b_0 až b_M sú rôzne od nuly, charakteristická rovnica **bude mať všeobecne M koreňov** $z_1, z_2, z_3 \ldots z_M$. Tieto korene môžu byť reálne jednoduché, viacnásobné alebo komplexne združené.

Potom v časovej oblasti:

$$\boxed{y_1[n] = \sum_{k=1}^{M} c_k \, z_k^n}$$

c_k - *konštanty určené z počiatočných podmienok.*

Komplexné korene je možné vyjadriť v tvare:

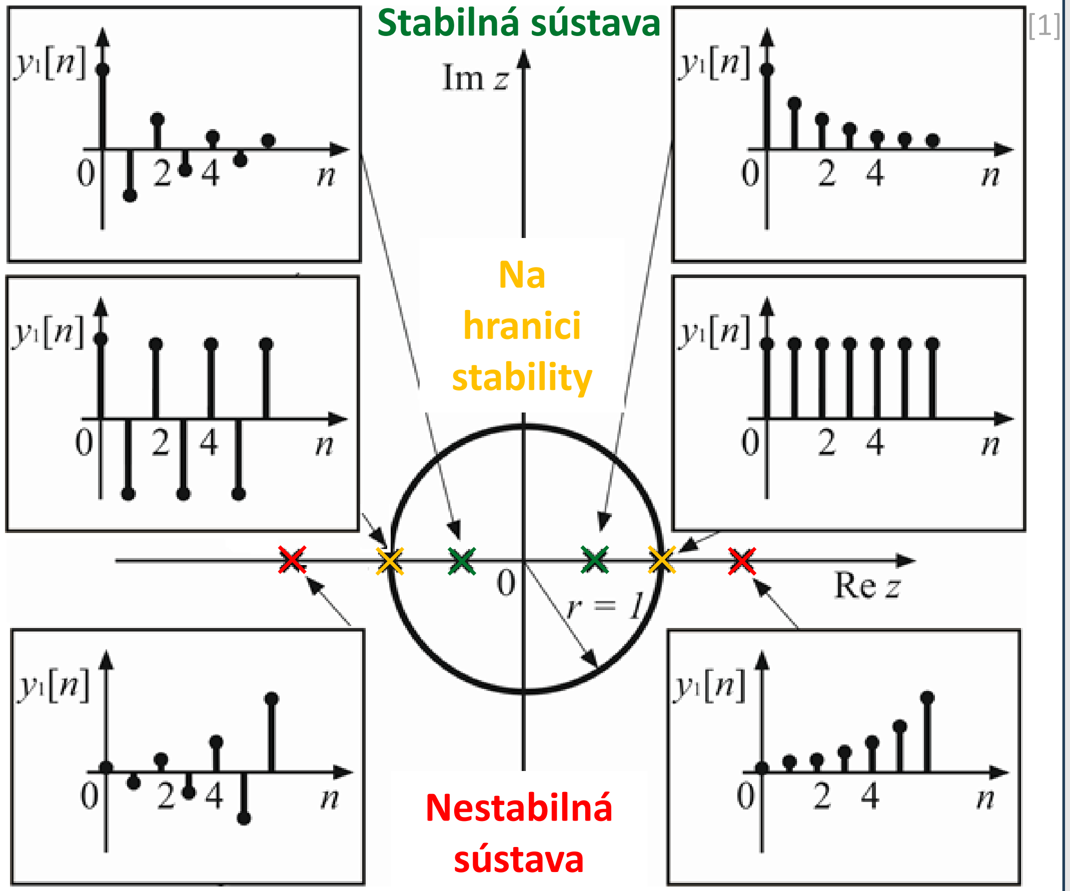
$$\boxed{z_i = r_i e^{j\omega_i}}$$

ω_i určuje uhlovú frekvenciu vlastných kmitov

$y_1[n]$ *fyzikálne* predstavuje tzv. vlastné kmity ČF, ktoré sú „harmonické“ postupnosti.

Vlastné kmity úzko súvisia so stabilitou sústavy:

- **$r_i > 1$ – Nestabilná sústava**
- **$r_i < 1$ – Stabilná sústava**
- **$r_i = 1$ – Sústava na hranici stability**



V komplexnej z-rovine, stabilná sústava má všetky póly (korene vlastných kmitov) vo vnútri jednotkovej kružnice. *Bližšie 3. prednáška – prenos ČS.*

[1] Ondráček: Diskrétne signály a sústavy

Diskrétna sústava – vnútená odozva

$y_2[n]$ druhé riešenie, ak je známy tvar budiaceho signálu x[n]. hovoríme vnútená odozva (vnútené kmity) systému, sústavy.

Úplné riešenie diferenčnej rovnice je nasledovné:

$$\boxed{y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \sum_{k=1}^{M} c_k\, z_k^n + y_2[n]}$$

Ak všetky zložky vlastných kmitov budú mať doznievajúci charakter ($r_i < 1$) potom v ustálenom stave bude celková odozva ČF daná iba vnútenou odozvou, ktorá dominuje. Preto podmienku $r_i < 1$ nazývame dominantnou podmienkou.

Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

Prednáška č. 2

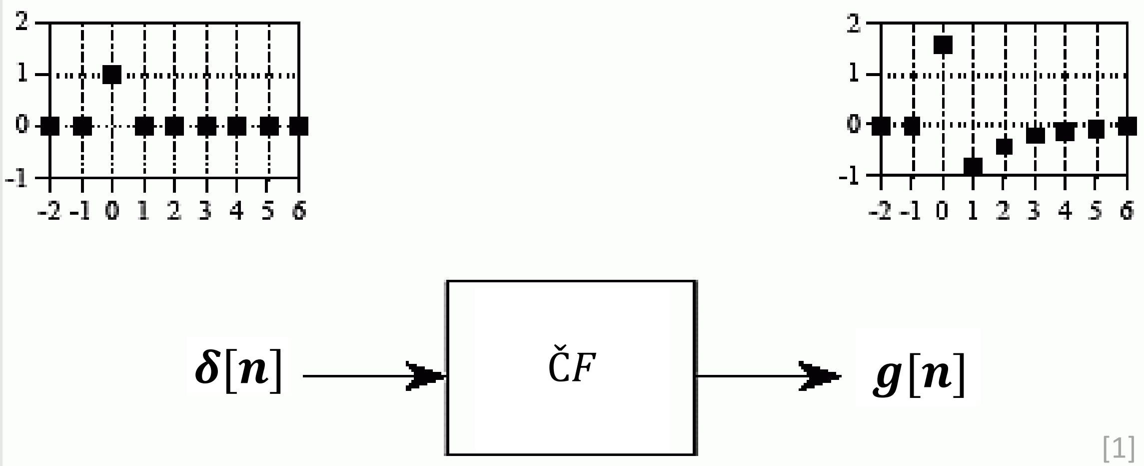
- Filtrácia – úvod k diskrétnemu spracovaniu signálov
- Diskrétna sústava – číslicový filter (ČF)
- **Časové charakteristiky ČF**

doc. Ing. Ondrej Kováč, PhD.

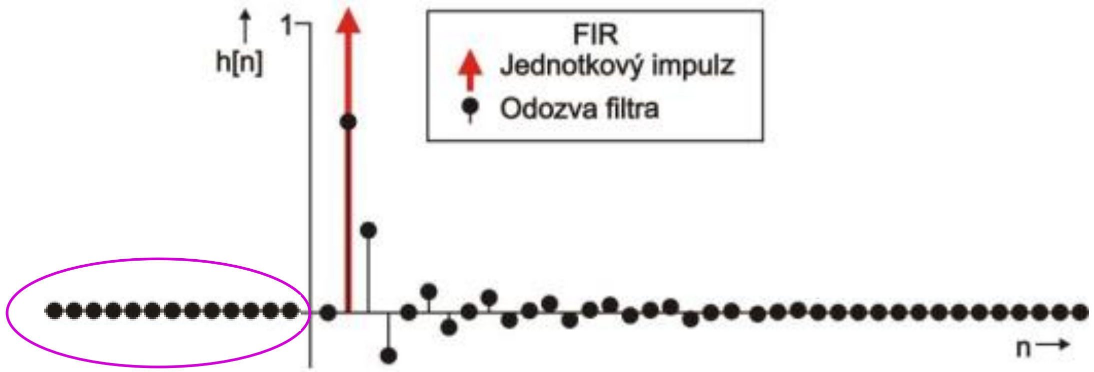
Diskrétna sústava – časové charakteristiky ČF

Rovnako ako spojité lineárne sústavy tak aj diskrétne lineárny sústavy možno v časovej oblasti opísať pomocou dvoch časových charakteristík.

1) Impulzná charakteristika (impulzná odpoveď) g[n] – Odpoveď systému na diskrétny jednotkový impulz



Z priebehu impulznej charakteristiky g[n] – určíme, či ide o systém **kauzálny** alebo **nekauzálny**. Vo všeob. **je systém kauzálny**, keď zmeny výstupného signálu nepredchádzajú zmenám vstupného signálu.
ČF bude **kauzálny** vtedy, keď jeho impulzová charakteristika g[n] bude nulová pre všetky hodnoty n < 0:



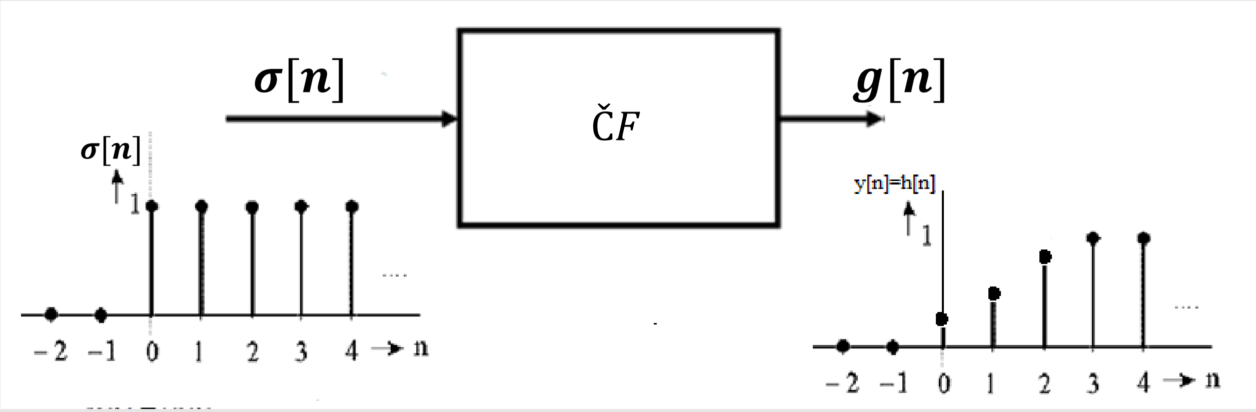
$$g[n] = 0 \text{ ak } n < 0$$

[1] Smith, Steven W. "The scientist and engineer's guide to digital signal processing." (1997).

Diskrétna sústava – časové charakteristiky ČF

Rovnako ako spojité lineárne sústavy tak aj diskrétne lineárny sústavy možno v časovej oblasti opísať pomocou dvoch časových charakteristík.

2) Prechodová charakteristika h[n] – odpoveď systému na diskrétny jednotkový skok na vstupe



Medzi impulznou a prechodovou charakteristikou existuje vzájomný vzťah:

$$g[n] = h[n] - h[n-1]$$

Ďakujem za pozornosť!

Nabudúce:
- Frekvenčné charakteristiky ČF
- Zapojenie ČF
- Stabilita ČF
- Syntéza ČF