Fakulta elektrotechniky
a informatiky

Číslicové spracovanie signálov

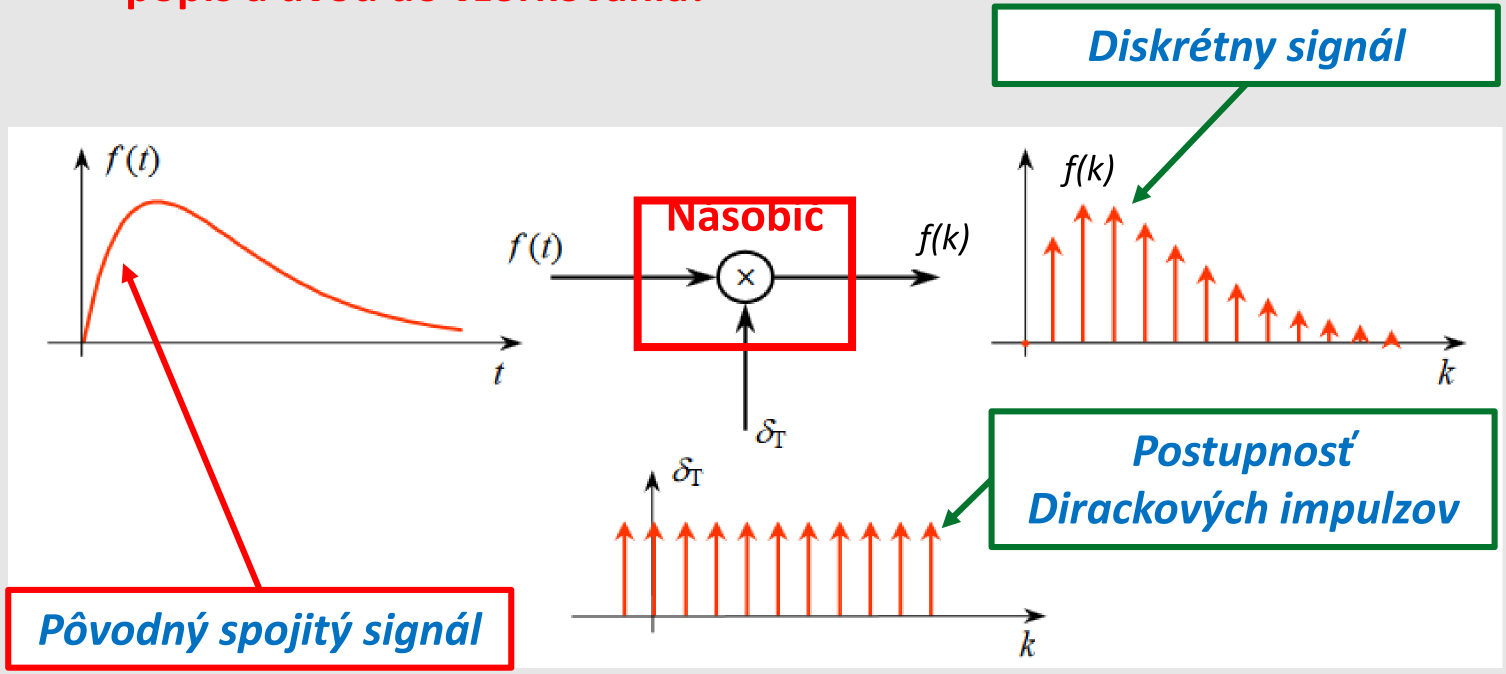
Prednáška č. 1

- Diskretizácia signálov - vzorkovanie

Ing. Ondrej Kováč, PhD.

Vzorkovanie signálu

- V oblasti elektroniky nastal približne pred tridsiatimi rokmi zlom, kedy sa masívne začalo upúšťať od analógovej techniky. Prvé významné vedecké pojednanie o diskretizácii signálov publikoval v **rokoch 1948 - 1949 Cloude E Shannon**. Teória o vzorkovaní sa v tej dobe označovala ako „Teoréma 13“.
- **Pod pojmom vzorkovanie rozumieme proces, pri ktorom sú zo spojitého signálu** v rovnakých časových intervaloch **odoberané vzorky**.
- Výsledkom vzorkovania **je diskrétny signál**. Teda signál, ktorý nadobúda ľubovoľné hodnoty, ktoré mal pôvodný spojitý signál ale je **časovo diskretizovaný**!
- Najčastejšie sa pri vysvetľovaní procesu vzorkovania stretávame **s ideálnym vzorkovaním pomocou speriodizovanej postupnosti Dirackových impulzov.** ← **Také vzorkovanie sa v praxi nevyužíva, ale veľmi dobre slúži na matematický popis a úvod do vzorkovania!**



***Priama aplikácia vzorkovacej vlastnosti Dirackového impulzu*. Ktorá v podstate znamená to, že ak spojitý signál $f(t)$ násobíme Dirackovým impulzom posunutým do nejakého časového okamihu $\delta(t-\tau)$, tak je získaná hodnota spojitého signálu v tomto časovom okamihu $f(\tau)$.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)dt$$

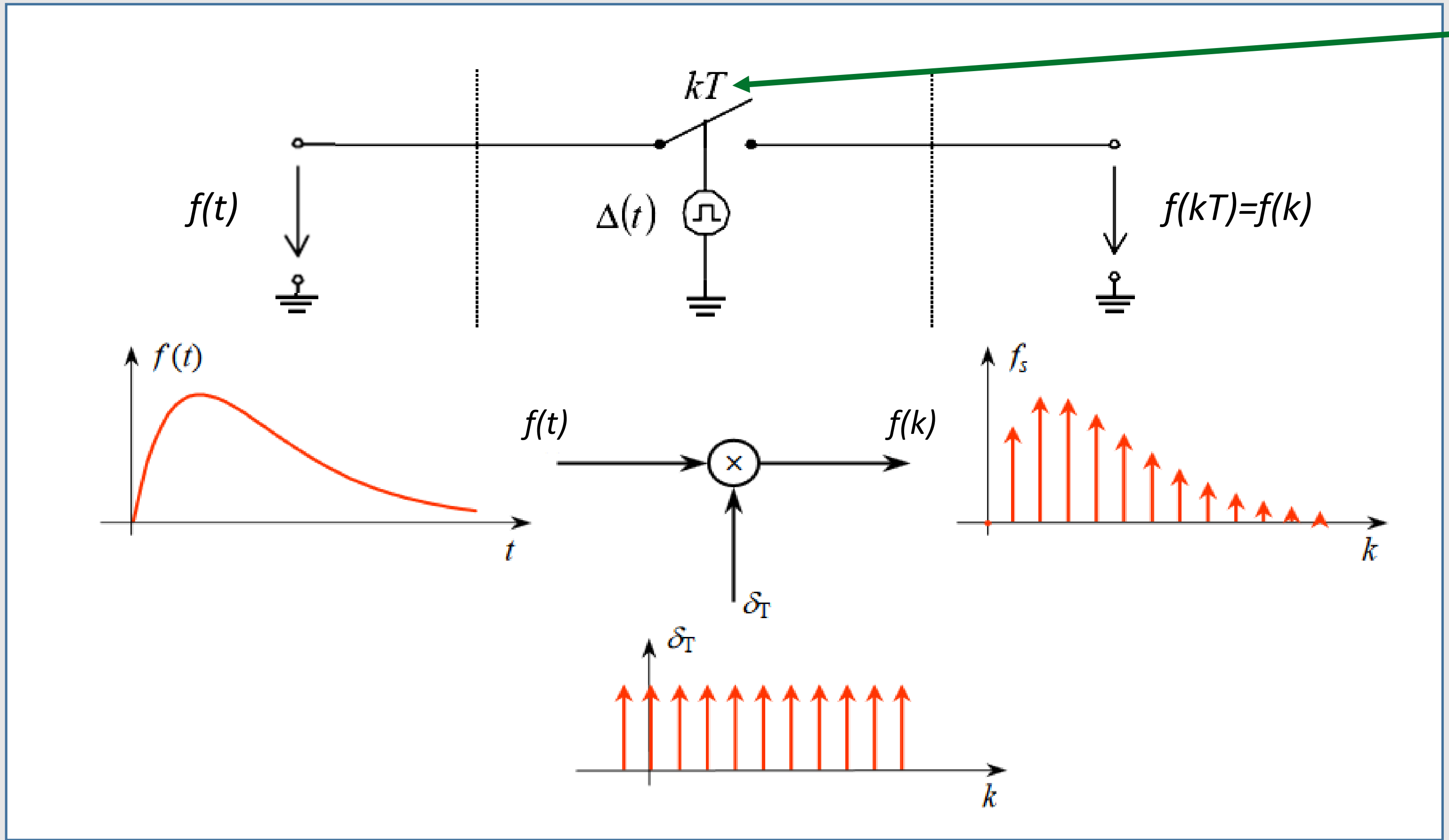
$$= f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$

Vzorkovanie signálu

- **Zariadenie na vzorkovanie signálu nazývame diskretizátor (vzorkovač).**

- Technicky si ideálne vzorkovanie môžeme predstaviť tak, že spojitý signál je spínaný ideálnym spínačom (*spínač sa zopína na nekonečne krátku dobu, nemá žiadne zákmity a pod.*), ktorý je riadený hodinovými impulzami (pravouhlý signál, ktorý má požadovanú frekvenciu).

Ideálny spínač, spínaný na nekonečne krátku dobu v pravidelných intervaloch (kT)



Vzorkovaciu periódu zvyčajne označujeme ako T_d, z ktorej potom vyplýva vzorkovacia frekvencia f_d.

$$f_d = \frac{1}{T_d}\ [Hz]$$

Vzorky sú odoberané v časových okamihoch kT_d a vzorkovaný signál značíme f(k) alebo tiež f(n).

Vzorkovanie signálu – Vzorkovacia teoréma

- **Každý časový priebeh signálu, ktorý má ohraničené spektrum** (má svoju maximálnu frekvenciu – napr. ohraničený na praktickú šírku B) **je jednoznačne určený postupnosťou svojich vzoriek odoberaných v rovnomerných časových intervaloch T_d.**
- Inak povedané, spojitý signál, ktorý nemá nekonečné spektrum (teda buď je prirodzene taký alebo je jeho spektrum vhodne filtrované) je možné z jeho vzorkovanej podoby obnoviť do pôvodného spojitého tvaru.
- **Musí však byť splnená tzv. Shannonova resp. Kotelnikovova či Nyquistova teoréma (podmienka).**

$$f_d \geq 2f_m \text{ alebo } \omega_d \geq 2\omega_m$$

Vzorkovacia frekvencia (f_d) musí byť aspoň 2x väčšia ako najvyššia frekvencia (f_m) signálu!

- Tiež poznáme pojem **Nyquistova frekvencia**

$$f_{Nyq} = 2f_m$$

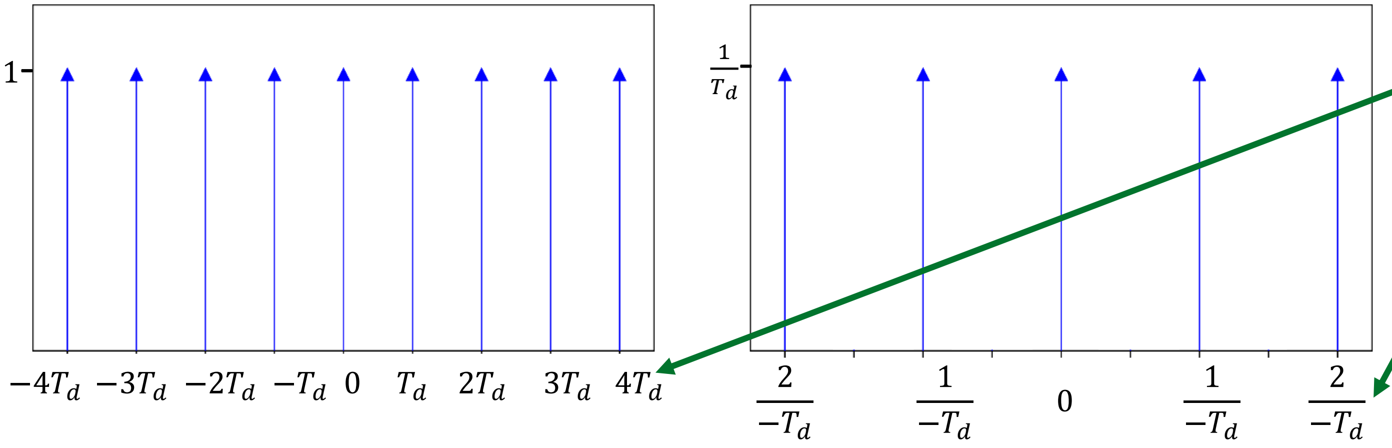
Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

- Ako už bolo uvedené, pri ideálnom vzorkovaní uvažujeme, že vzorky sú zo signálu získavané pomocou **postupnosti Diracových impulzov s jednotkovou amplitúdou** (*v En. literatúre - Dirac comb., Dirac train alebo shah function*).
- **Zvyčajne tento signál označujeme p(t).**

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- **Dá sa ukázať, že spektrum tohto signálu je čiarové (je to periodický signál) a tiež je to postupnosť impulzov s frekvenciou k/T_d a amplitúdou $1/T_d$.**

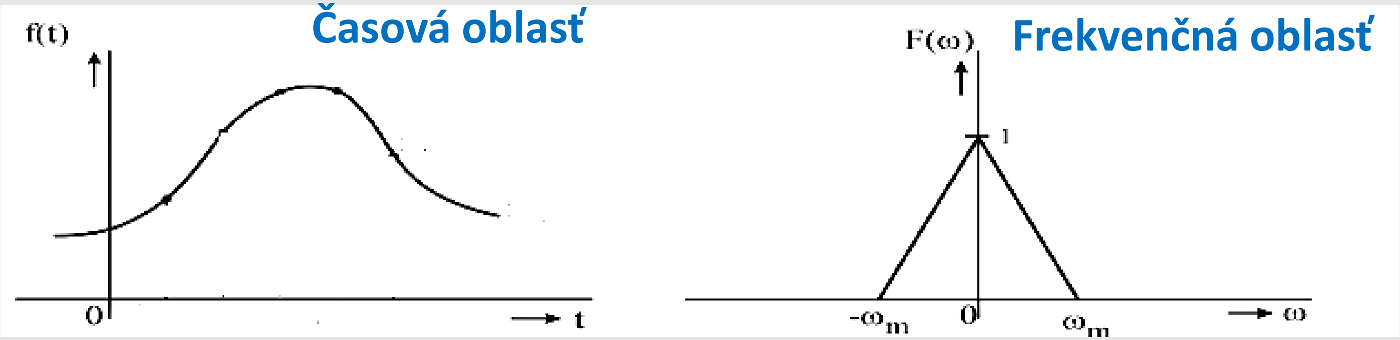
Časová oblasť **Frekvenčná oblasť**



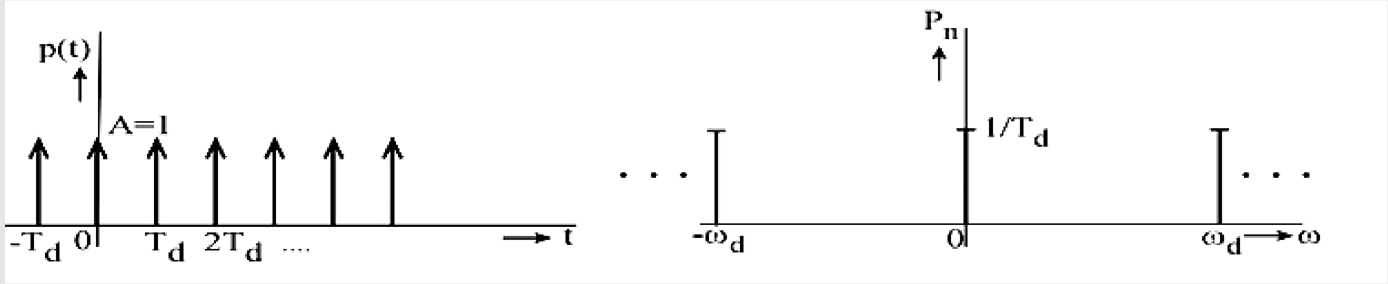
Čím bude T_d menšie (teda v čase budú impulzy hustejšie) tým budú v spektre impulzy od seba ďalej!

Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

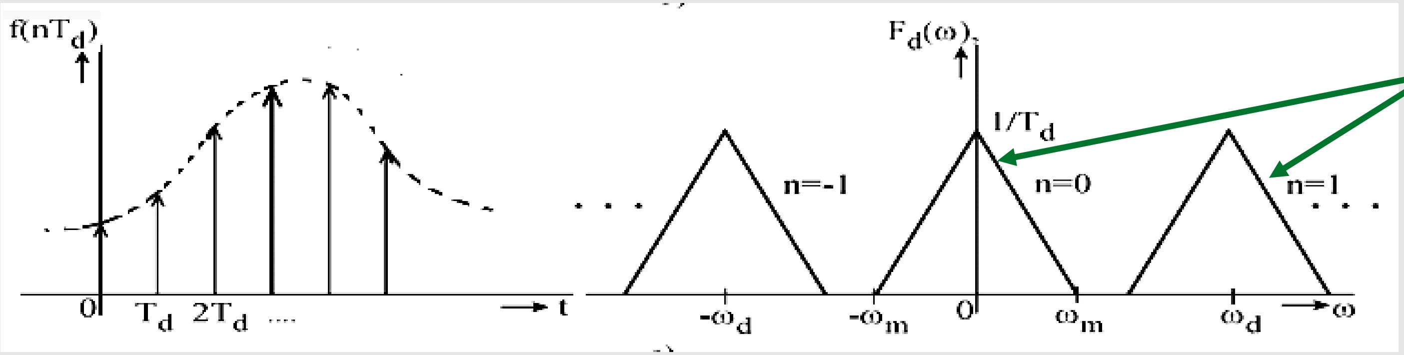
- Uvažujme ľubovoľný spojitý signál f(t), ktorý je frekvenčné obmedzený na maximálnu frekvenciu $\boldsymbol{\omega}_m$



- Tento signál budeme vzorkovať pomocou postupnosti Diracových impulzov p(t)



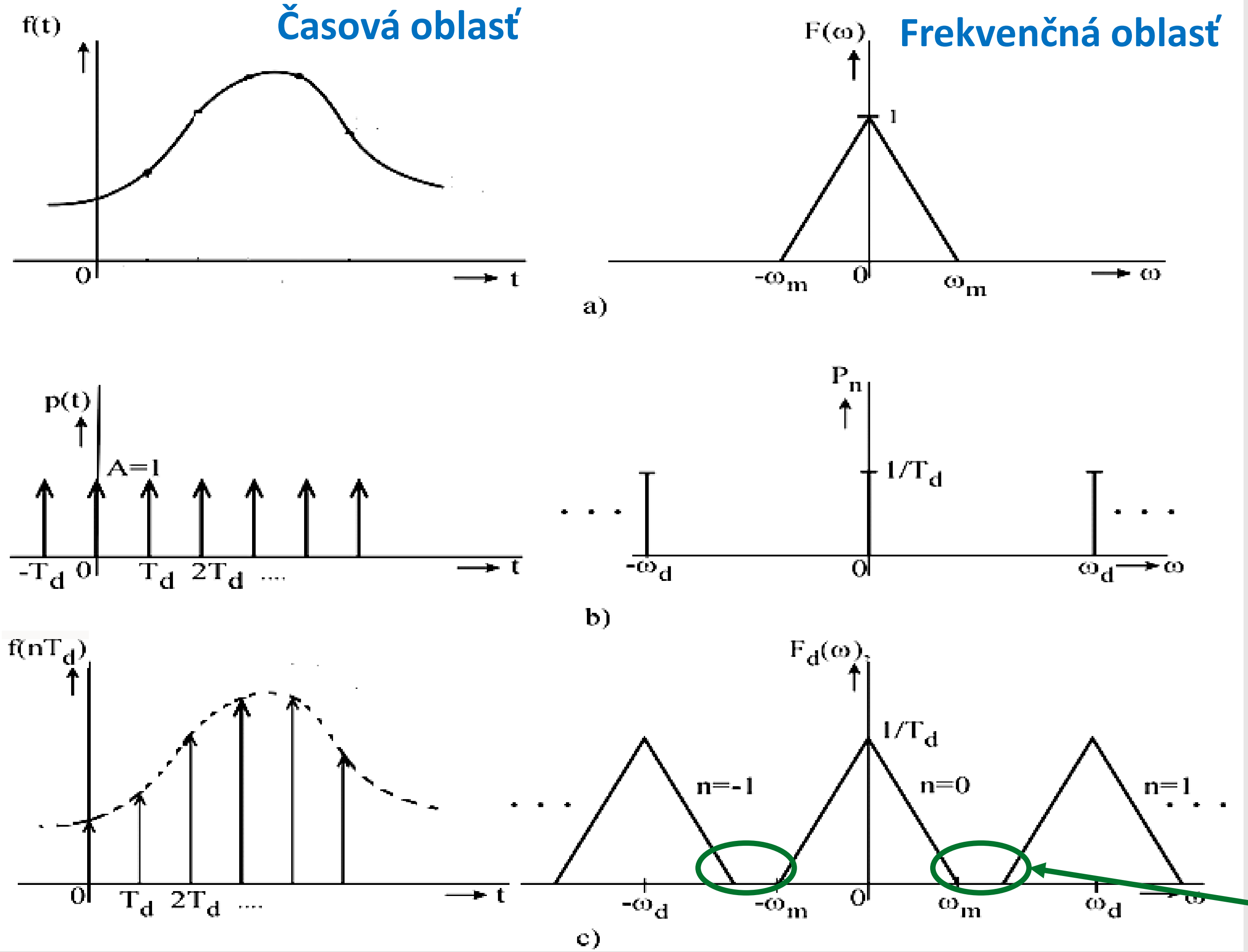
- **Predpokladajme, že je splnená Nyquistova teoréma $\omega_d > 2\omega_m$**



Spektrum vzorkovaného signálu je speriodizované! Teda, periodicky sa objavujú kópie pôvodného spektra. Kópie sa nachádzajú v násobkoch $\boldsymbol{\omega}_d$.

Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

- Uvažujme ľubovoľný spojitý signál f(t), ktorý je frekvenčné obmedzený na maximálnu frekvenciu $\boldsymbol{\omega}_m$



Spektrum diskrétneho signálu je vždy spojité a periodické!

$$\bar{F}_d(\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega - k\omega_d)$$

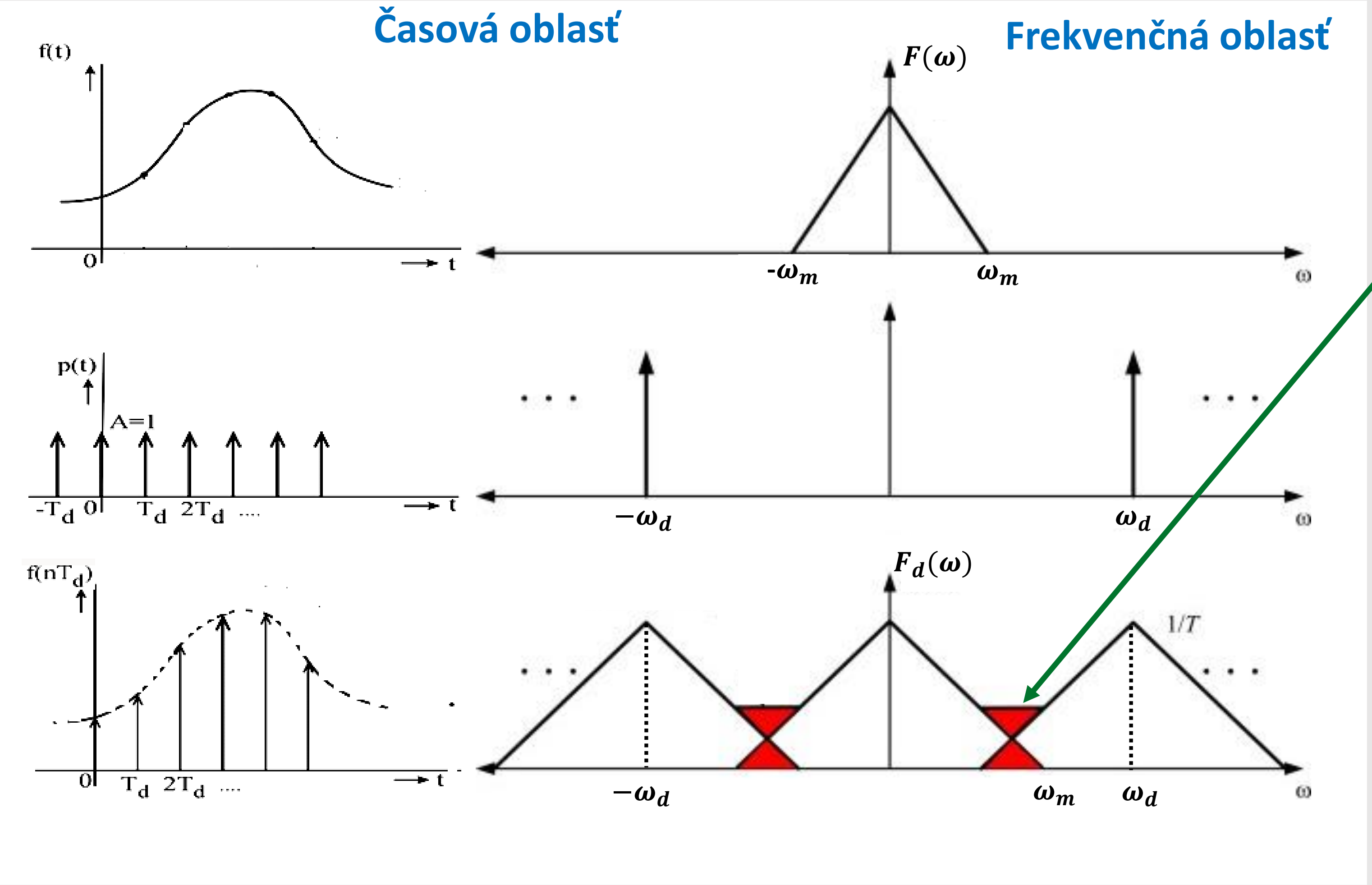
Spektrum Diracková postupnosti.

Pôvodné spektrum signálu f(t) opakované v okamihoch $k\omega_d$.

*Všimnime si, že kópie pôvodného spektra sú od seba dostatočne vzdialené a neprekrývajú sa. Toto je zabezpečené **splnením Nyquistovej podmienky**.*

Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

- Uvažujme ľubovoľný spojitý signál f(t), ktorý je frekvenčné obmedzený na maximálnu frekvenciu $\boldsymbol{\omega}_m$
- Uvažujme prípad, kedy nie je zabezpečená Nyquistova podmienka, teda $\boldsymbol{\omega_d < 2\omega_m}$

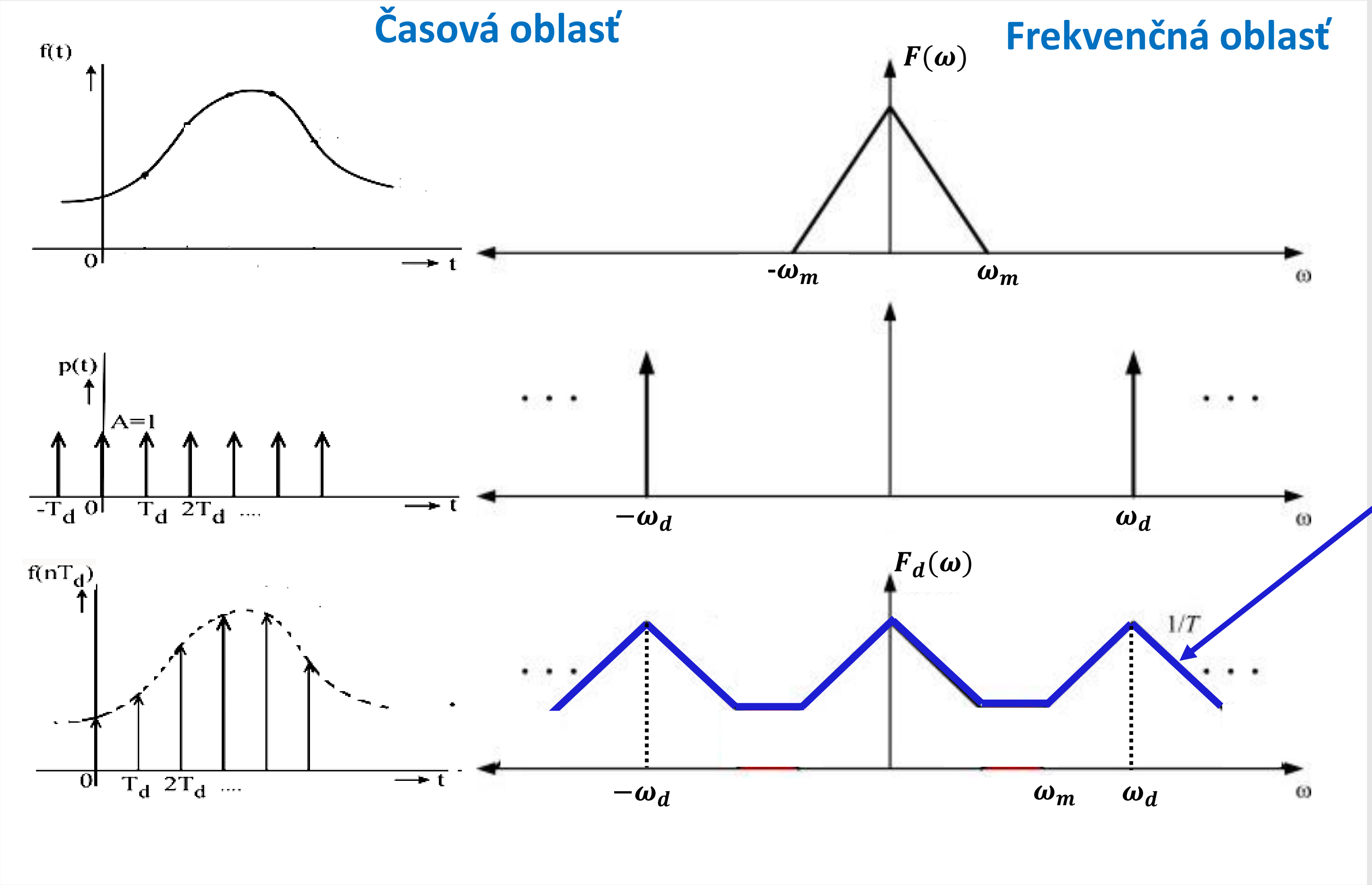


*Všimnime si, že kópie spektra sa v istej časti prekrývajú. Tento jav sa nazýva **aliasing** – teda prekrývanie spektier.*

Je to nežiadúci jav, pretože povedie k nesprávnej spätnej rekonštrukcii spojitého signálu.

Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

- Uvažujme ľubovoľný spojitý signál f(t), ktorý je frekvenčné obmedzený na maximálnu frekvenciu ω_m
- Uvažujme prípad kedy nie je zabezpečená Nyquistova podmienka, teda $\omega_d < 2\omega_m$



*Všimnime si, že kópie spektra sa v istej časti prekrývajú. Tento jav sa nazýva **aliasing** – teda prekrývanie spektier.*

Je to nežiadúci jav, pretože povedie k nesprávnej spätnej rekonštrukcii spojitého signálu.

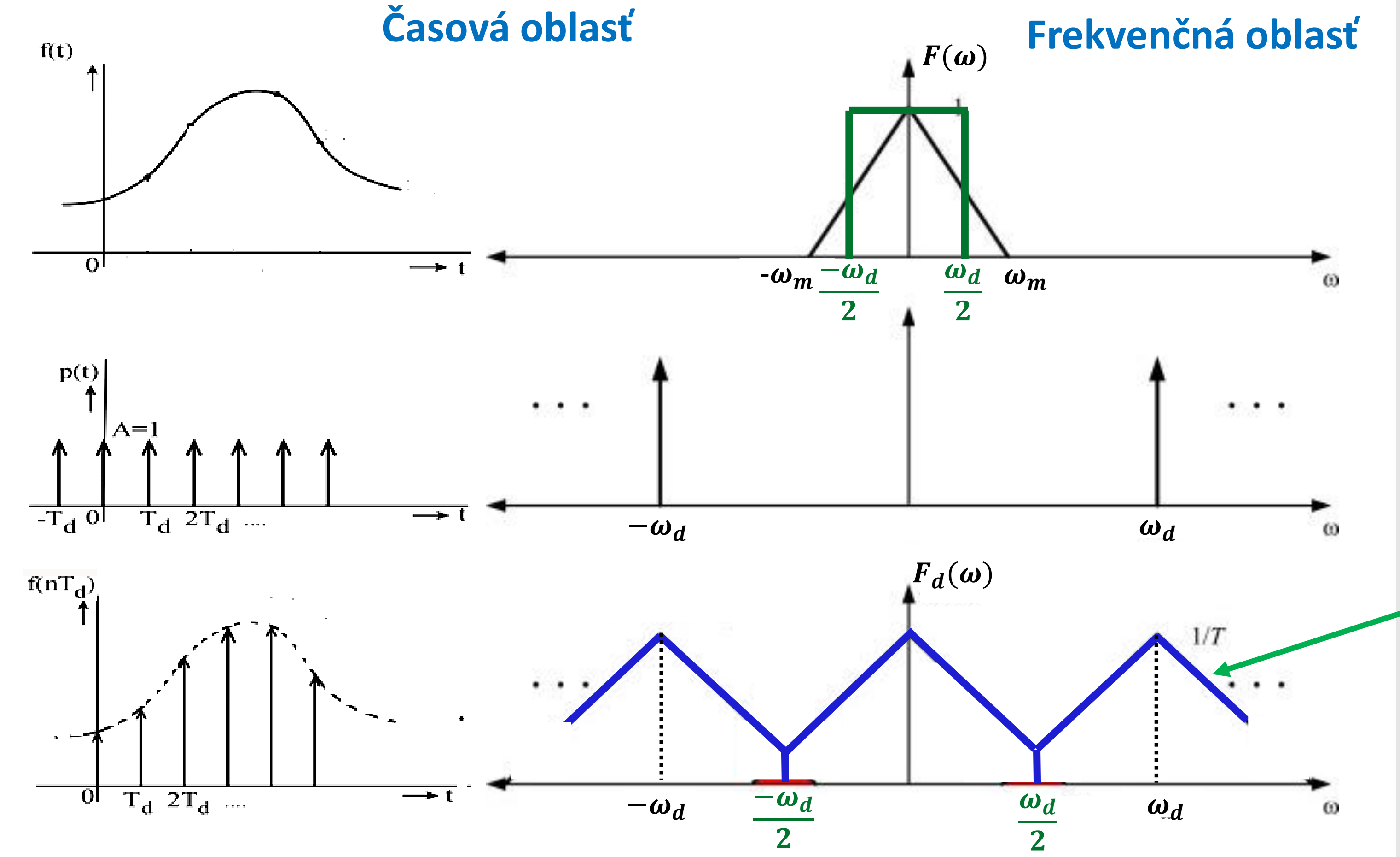
Spektrum vzorkovaného signálu teraz vyzerá inak ako bolo pôvodné spektrum.

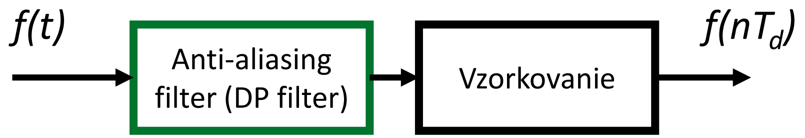
K aliasingu dochádza v dvoch prípadoch.

1. ***Nevhodne zvolená vzorkovacia frekvencia.***
2. ***Vzorkovaný signál nie je frekvenčne obmedzený.***

Vzorkovanie signálu – Spektrum ideálne vzorkovaného signálu

- **K aliasingu dochádza v dvoch prípadoch**:
  - Nevhodne zvolená vzorkovacia frekvencia – Riešením je zvýšiť vzorkovaciu frekvenciu (ak je to technicky možné).
  - Vzorkovaný signál nie je frekvenčne obmedzený - Využíva sa tzv. **anti-aliazingový filter. Ide o dolnopriepustný filter, ktorý potláča frekvenčné zložky signálu ktoré sú vyššie ako $\frac{\omega_d}{2}$.**





Vzorkovanie s frekvenčným obmedzením vstupného signálu

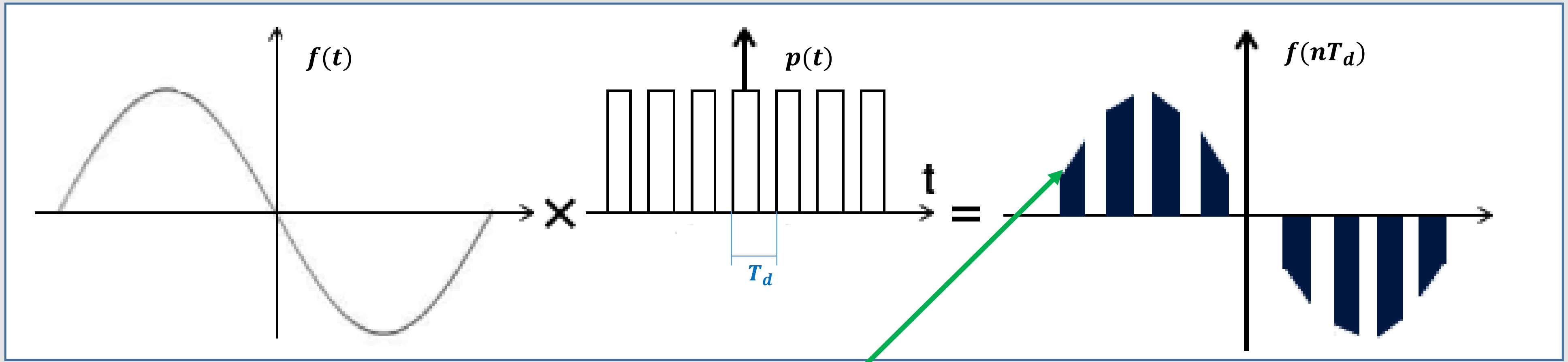
Spektrum nie je aké bolo spektrum pôvodného signálu, ale nie je skreslené. Rekonštruovaný signál bude frekvenčne obmedzený.

Vzorkovanie signálu – PAM 1 a PAM 2

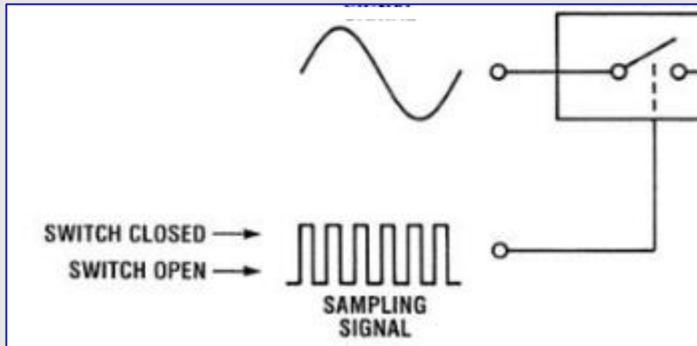
Okrem ideálneho vzorkovania, ktoré slúži skôr na matematický popis poznáme ešte:

1. Vzorkovanie prvého druhu (PAM 1) - Prirodzené vzorkovanie (Natural sampling)

- Vzorky signálu sú odoberané v pravidelných časových intervaloch tak, že je tento signál násobený postupnosťou pravouhlých impulzov s nenulovou šírkou.
- Veľmi jednoducho realizovateľné, ale v praxi tento druh nemá veľké využitie.
- Vzorkovaný signál počas dĺžky trvania pravouhlého signálu kopíruje priebeh pôvodného signálu.



Priebeh diskrétneho signálu kopíruje priebeh spojitého signálu



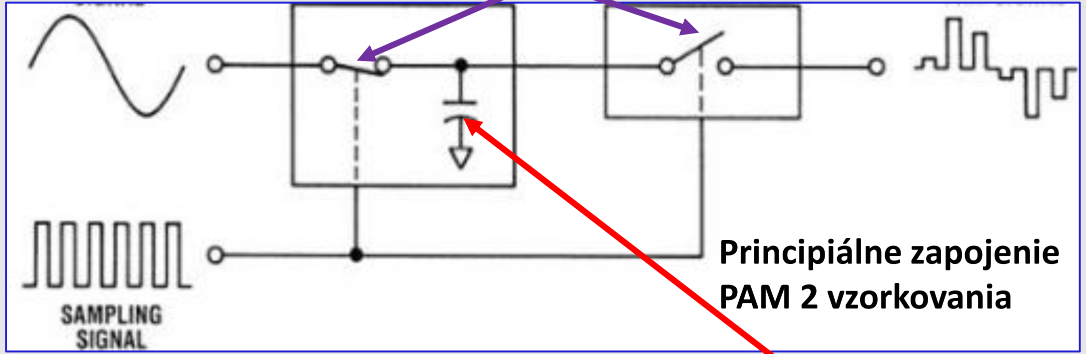
Principiálne zapojenie PAM 1 vzorkovania

Vzorkovanie signálu - PAM 1 a PAM 2

2. Vzorkovanie prvého druhu (PAM 2) - (Flat top sampling)

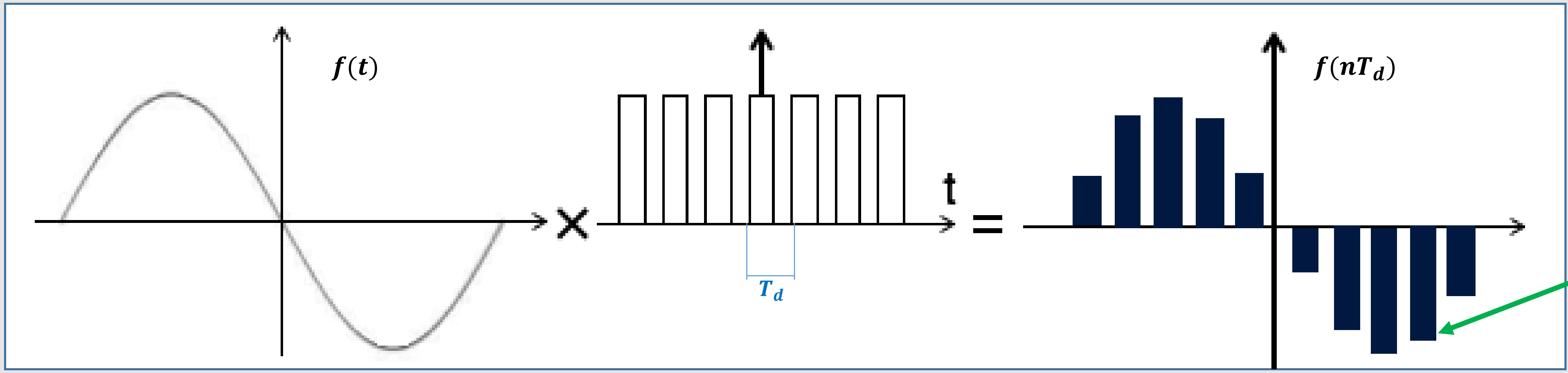
- V praxi sa používa vzorkovanie druhého druhu.
- Rovnako **využíva postupnosť pravouhlých impulzov, odobraté vzorky majú nenulovú šírku, ale ich veľkosť je počas celého trvania vzorky rovnaká.**
- Výhodou tohto typu vzorkovania je aj to, že ak je prenášaný signál vystavený šumu, je pomerne jednoduché tento šum potlačiť. To je dané tým, že hodnota vzorky počas jej trvania by mala byť konštantná.

Ak má vzorkovací signál hodnotu logickej 0 prvý spínač je zopnutý a nabíja sa kondenzátor. Následne vzorkovací signál prejde do logickej 1 a zopne sa druhý spínač. Na výstupe obvodu je merané konštantné napätie kondenzátora (predpokladáme ideálne súčiastky a nekonečný výstupný odpor).



Principiálne zapojenie PAM 2 vzorkovania

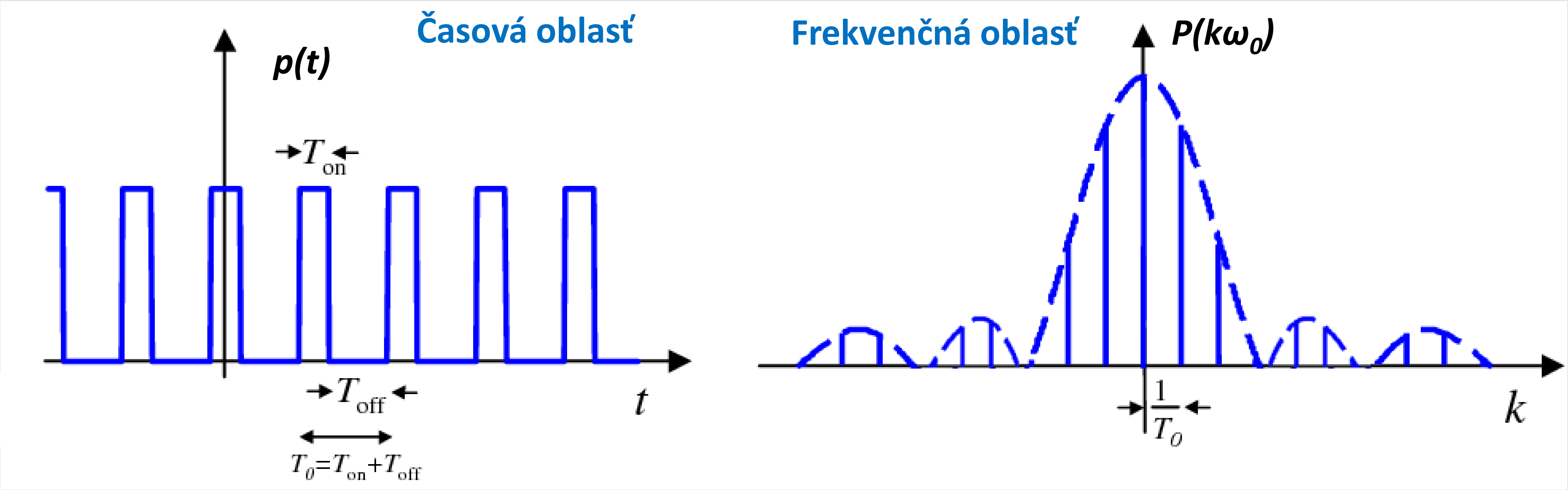
Kondenzátor sa nabije na úroveň zosnímaného napätia.



Priebeh diskrétneho signálu udržiava konštantné hodnoty počas trvania každej vzorky.

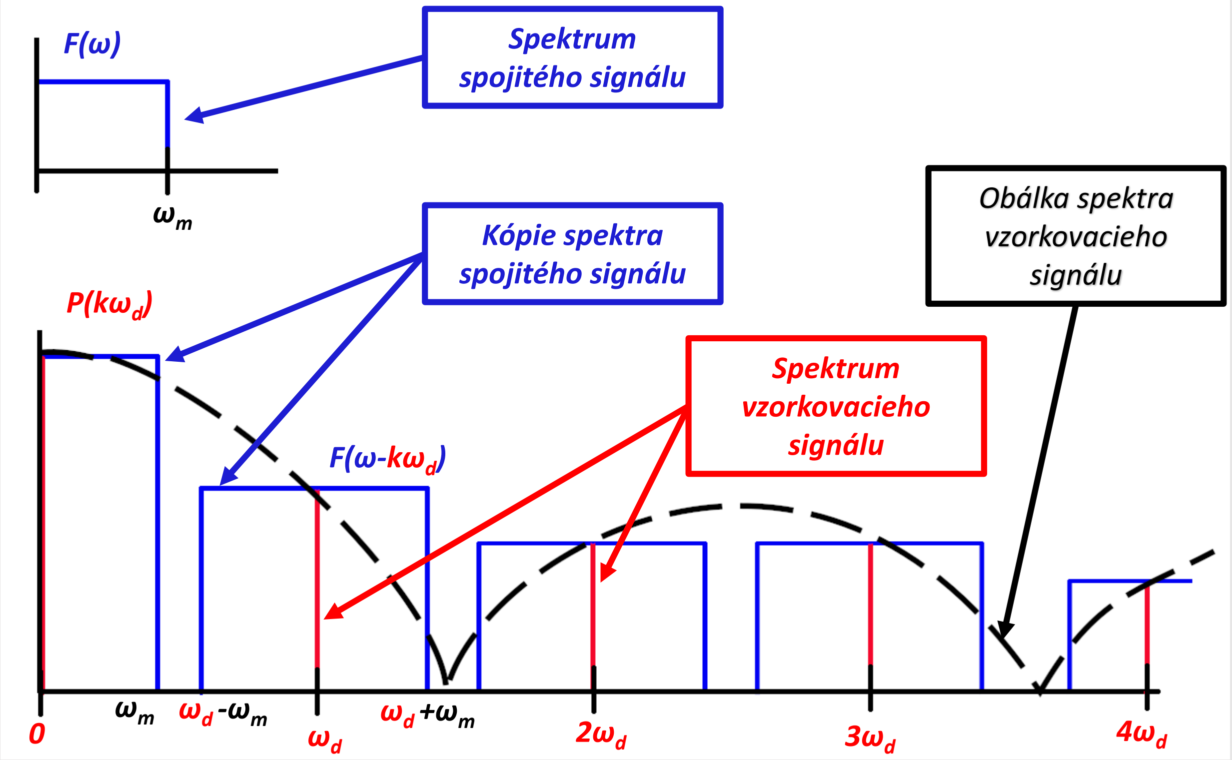
Vzorkovanie signálu – Spektrum signálu vzorkovaného s PAM 1

- Nakoľko PAM 1 aj PAM 2 využívajú sériu pravouhlých impulzov s nenulovou šírkou, spektrum sa bude odlišovať od spektra ideálne vzorkovaného signálu.
- **Spektrum periodického pravouhlého signálu je diskrétna (čiarová) funkcia sinc()** a nie séria impulzov ako tomu bolo pri ideálnom vzorkovaní s Diracovou postupnosťou.
- V spektre vzorkovaného signálu sa teda nejako prejaví spektrum **pôvodného signálu f(t)** súčasne so spektrom **vzorkovacieho signálu p(t).**



Vzorkovanie signálu – Spektrum signálu vzorkovaného s PAM 1

- **Spektrum PAM 1 vzorkovaného signálu** bude obsahovať kópie pôvodného spektra, ktoré budú opakované v k-násobkoch vzorkovacej frekvencie. Keďže čiarové spektrum ***$P(k\omega_d)$*** vzorkovacieho signálu p(t) je diskrétne a opisuje obálku (sinc funkcia), jednotlivé kópie sa budú s narastajúcim násobkom vzorkovacej frekvencie zmenšovať.



$$\bar{F}_d(\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{P}(k\omega_d)\bar{F}(\omega - k\omega_d)$$

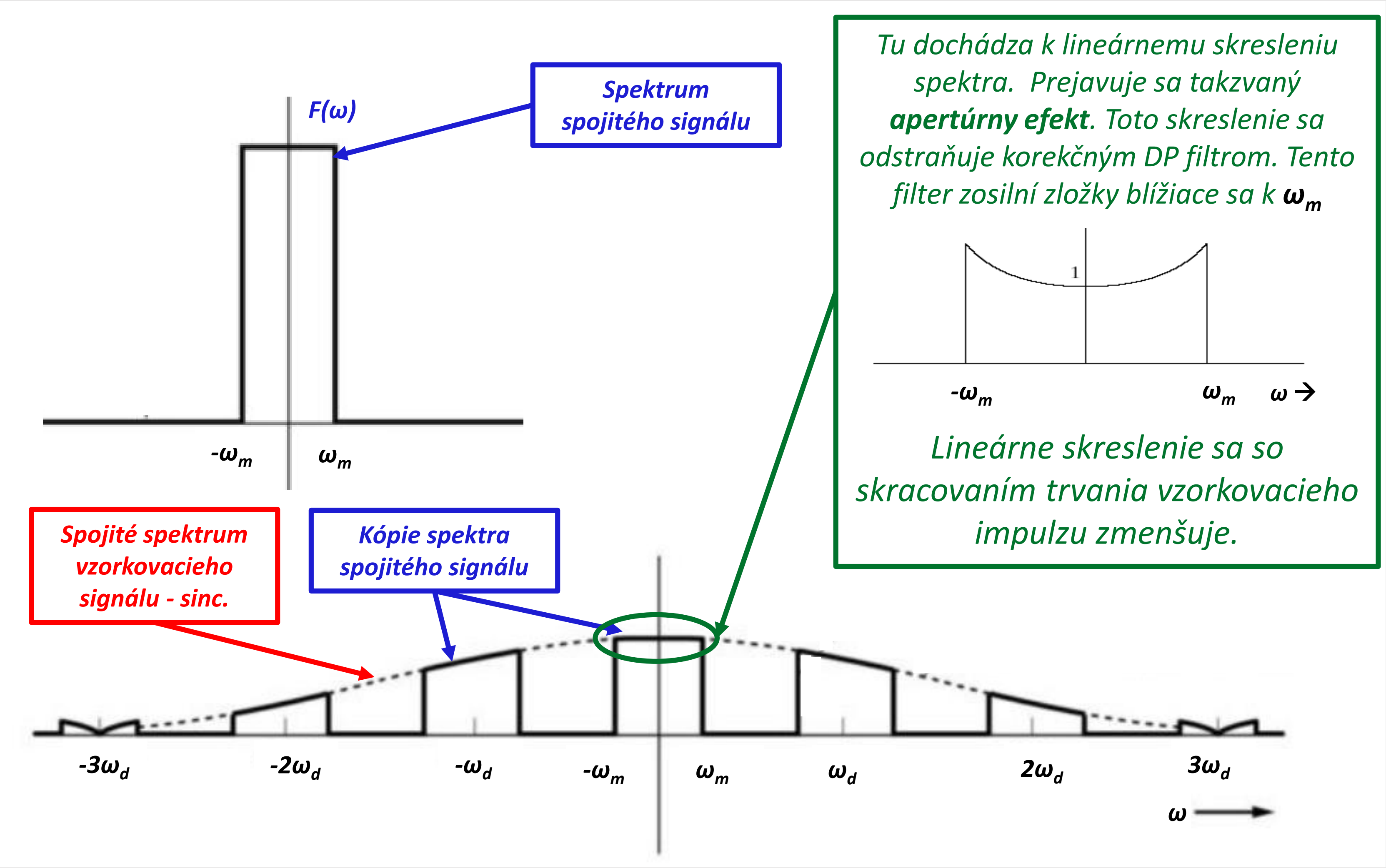
Spektrum vzorkovacej postupnosti.

Pôvodné spektrum signálu f(t) opakované v okamihoch $k\omega_d$.

Vzorkovanie signálu – Spektrum signálu vzorkovaného s PAM 2

- **Spektrum PAM 2 vzorkovaného signálu** má rozloženie spektrálnych zložiek okolo násobkov $\pm k\omega_d$. Veľkosť všetkých spektrálnych zložiek vrátane základnej zložky je **ovplyvnená sinc funkciou**, ktorá tvorí spojitú obálku aj pre dielčie spektrálne zložky

- ***Prečo je teraz spektrum spojité?*** Každú jednotlivú vzorku signálu môžeme vyjadriť ako súčin okamžitej hodnoty spojitého priebehu f(t) v okamžiku T_d a **jedného pravouhlého impulzu p(t)** s jednotkovou amplitúdou a šírkou τ (je to neperiodický signál, jeho spektrum je spojitá sinc funkcia).



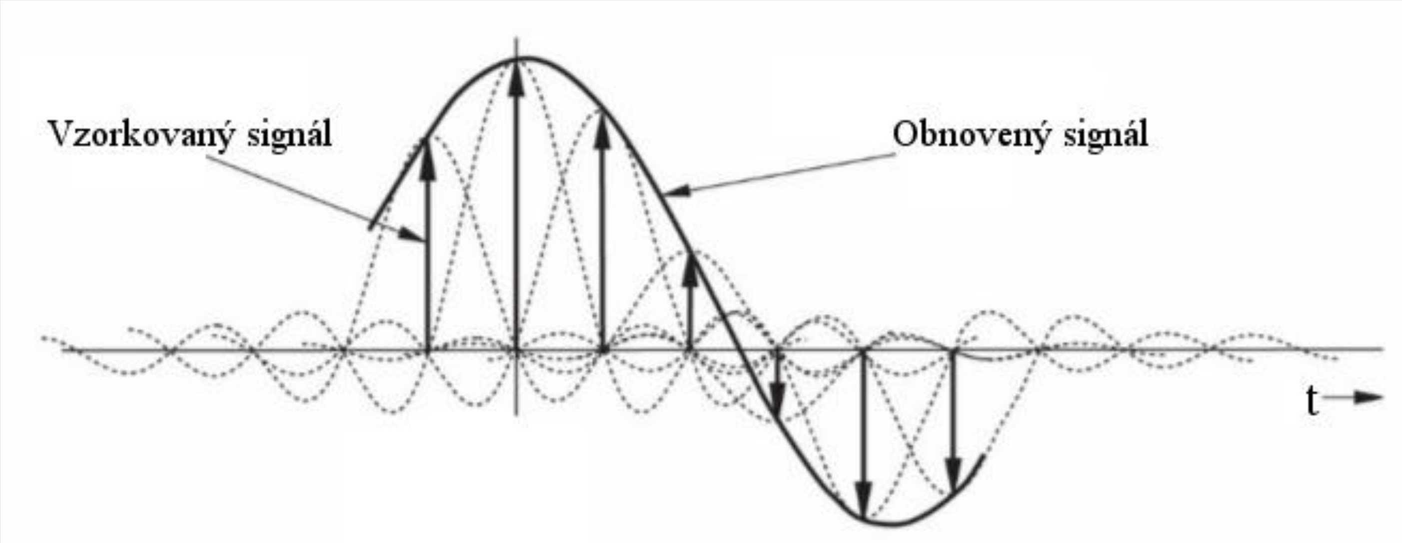
Rekonštrukcia signálu – Shannon-Kotelnikov rad

- Pri vzorkovacej teoréme bolo uvedené, že **každý časový priebeh signálu, ktorý má ohraničené spektrum je jednoznačne určený postupnosťou svojich vzoriek odoberaných v rovnomerných časových intervaloch T_d.**

- V priestore ortogonálnych harmonických funkcii je pôvodný spojitý signál možné z jeho vzorkovanej podoby obnoviť (rekonštruovať) pomocou **Shannonovho-Kotelnikového radu**.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_d)\, sinc\left(\frac{t - nT_d}{T_d}\right)$$

- Tento vzťah vo svojej podstate predstavuje sumu násobkov vzoriek a funkcie sinc(t), ktorá je posunutá do časového okamihu, v ktorom daná vzorka bola zo signálu získaná (nT_d). Hodnota vzorky určuje maximálnu hodnotu danej funkcie sinc(t). Funkcia sinc(t) je spojitá a teda výsledný signál je výsledkom súčtu všetkých takto posunutých funkcii.

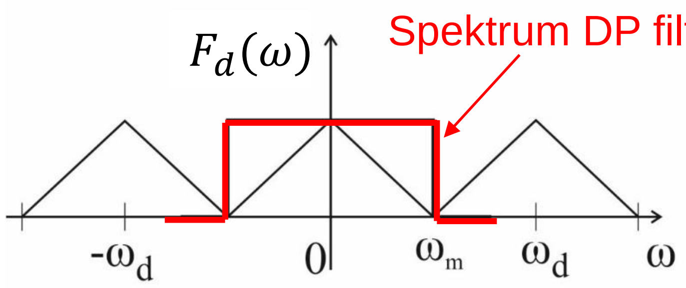


Rekonštrukcia signálu - Shannon-Kotelnikov rad

- V priestore ortogonálnych harmonických funkcii je pôvodný spojitý signál možné z jeho vzorkovanej podoby obnoviť (rekonštruovať) pomocou **Shannonovho-Kotelnikového radu**.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_d)\, sinc\left(\frac{t - nT_d}{T_d}\right)$$

Dá sa ukázať, že tento vzťah predstavuje **konvolúciu v časovej oblasti. Z vety o časovej konvolúcii je možné povedať, že v spektrálnej oblasti to bude obyčajný súčin dvoch obrazov.**
Tiež vieme, že Fourierová transformácia sinc funkcie je pravouhlý impulz. Teda pre rekonštrukciu signálu postačí diskrétny signál filtrovať ideálnym DP filtrom.

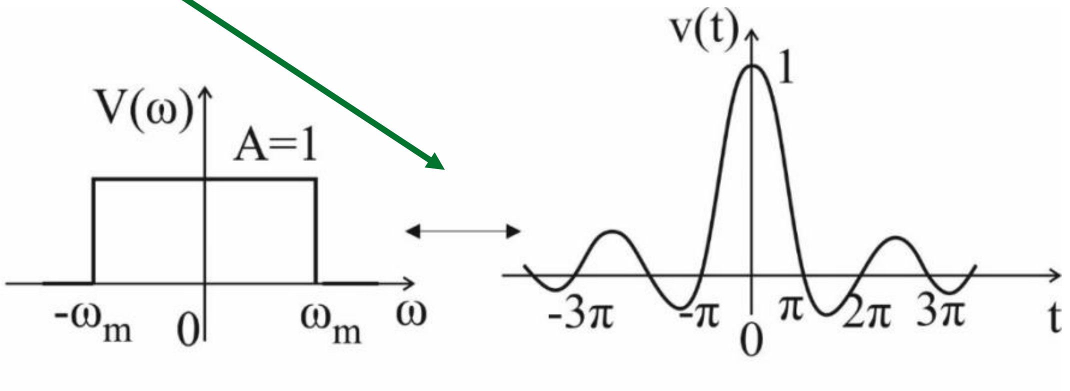


$$\overline{F_d}(\omega)\overline{V}(\omega) \xleftrightarrow{IFT} f_d(t) * v(t) = f(t)$$

Veta o časovej konvolúcii

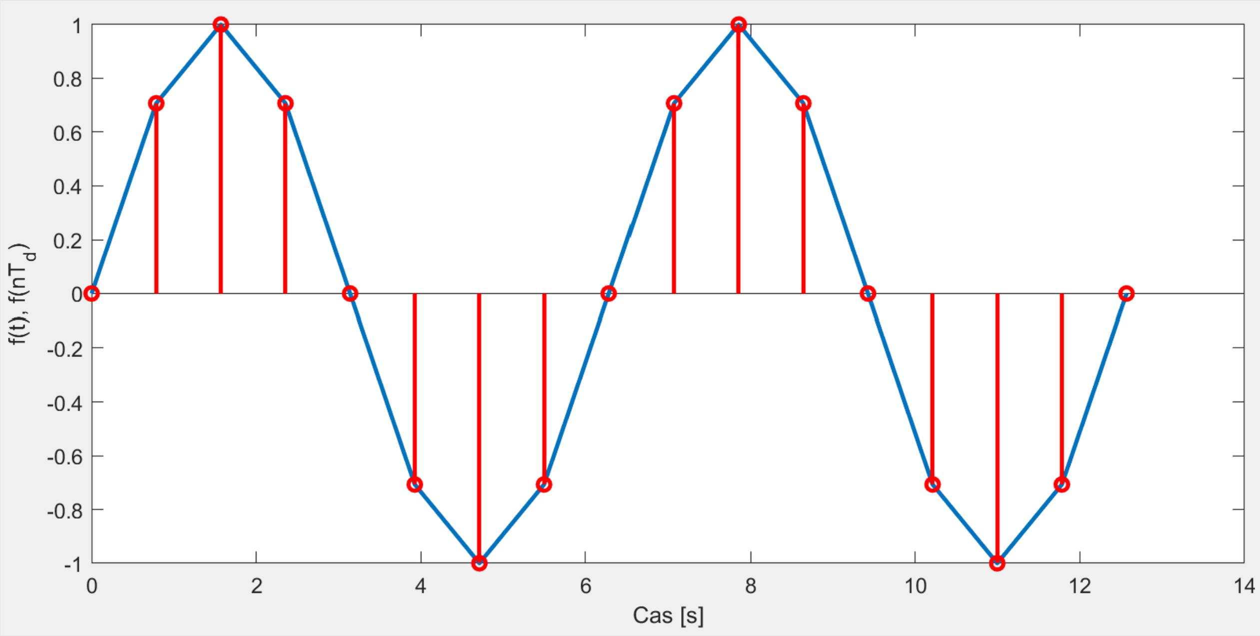
Obnovený signál

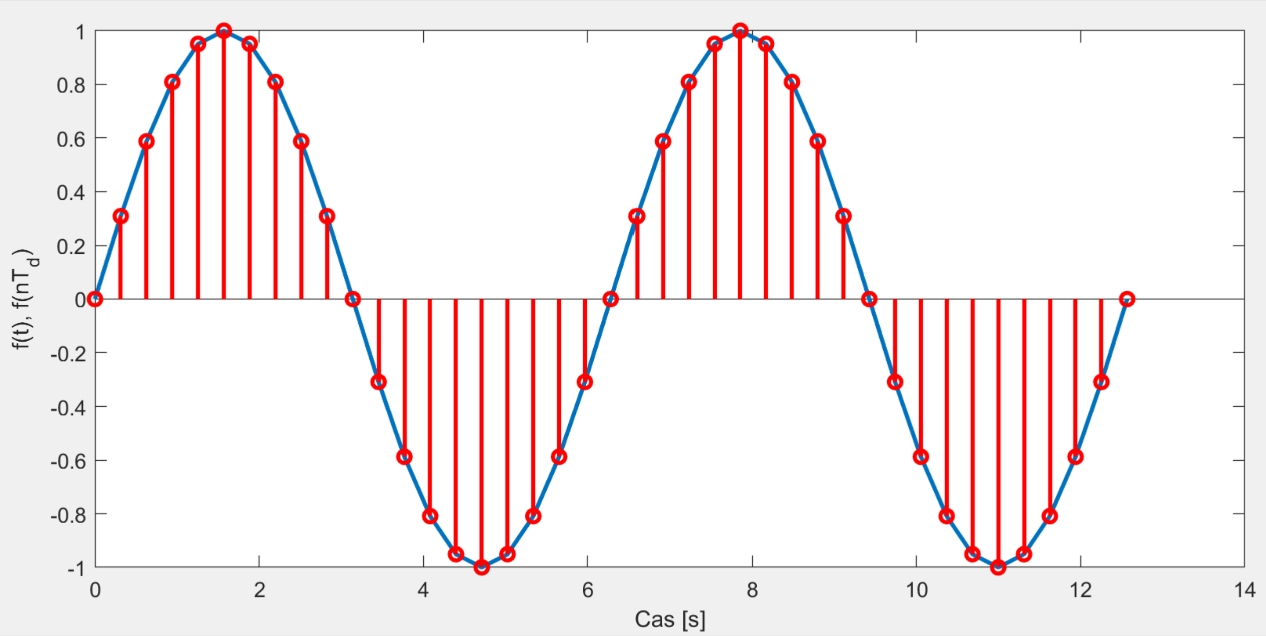
$$v(t) = A.2\omega_m\, sinc(t.\omega_m)$$



Rekonštrukcia signálu – Lineárna interpolácia

- Častokrát sa stretávame s obnovou signálu pomocou lineárnej interpolácie.
- **Podstata tejto rekonštrukcie spočíva v pospájaní diskrétnych hodnôt pomocou úsečiek.**
- Je nutné mať na pamäti, že sa nejedná o skutočnú obnovu signálu, ale ak je vzorkovanie naozaj husté, táto interpolácia dostatočne popisuje signál.





Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s jednotkovou amplitúdou a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Maximálna frekvencia $\boldsymbol{f_m = 5Hz}$, teda

$$\boldsymbol{f_d \geq 2f_m \ \rightarrow f_d \geq 10\ Hz}$$

- Pre diskretizačnú periódu bude platiť

$$\boldsymbol{T_d \geq \frac{1}{2f_m} = 0.1\ s}$$

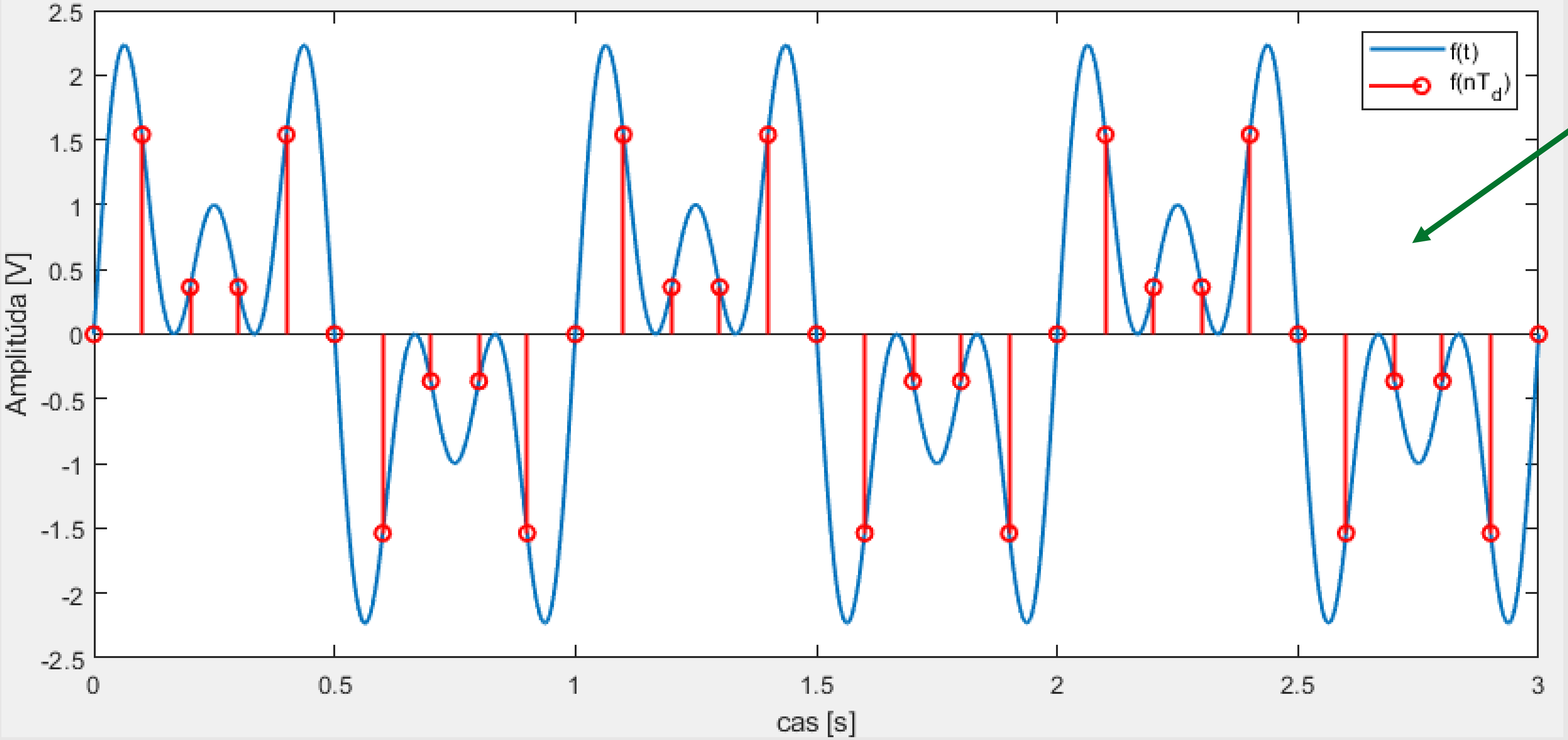
- Teda zo signálu budeme odoberať vzorky v intervale 0.1s

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = 10\ Hz;\ \ T_d \geq \frac{1}{2f_m} = 0.1\ s}$$



Niečo asi nebude v poriadku. Alebo nie?

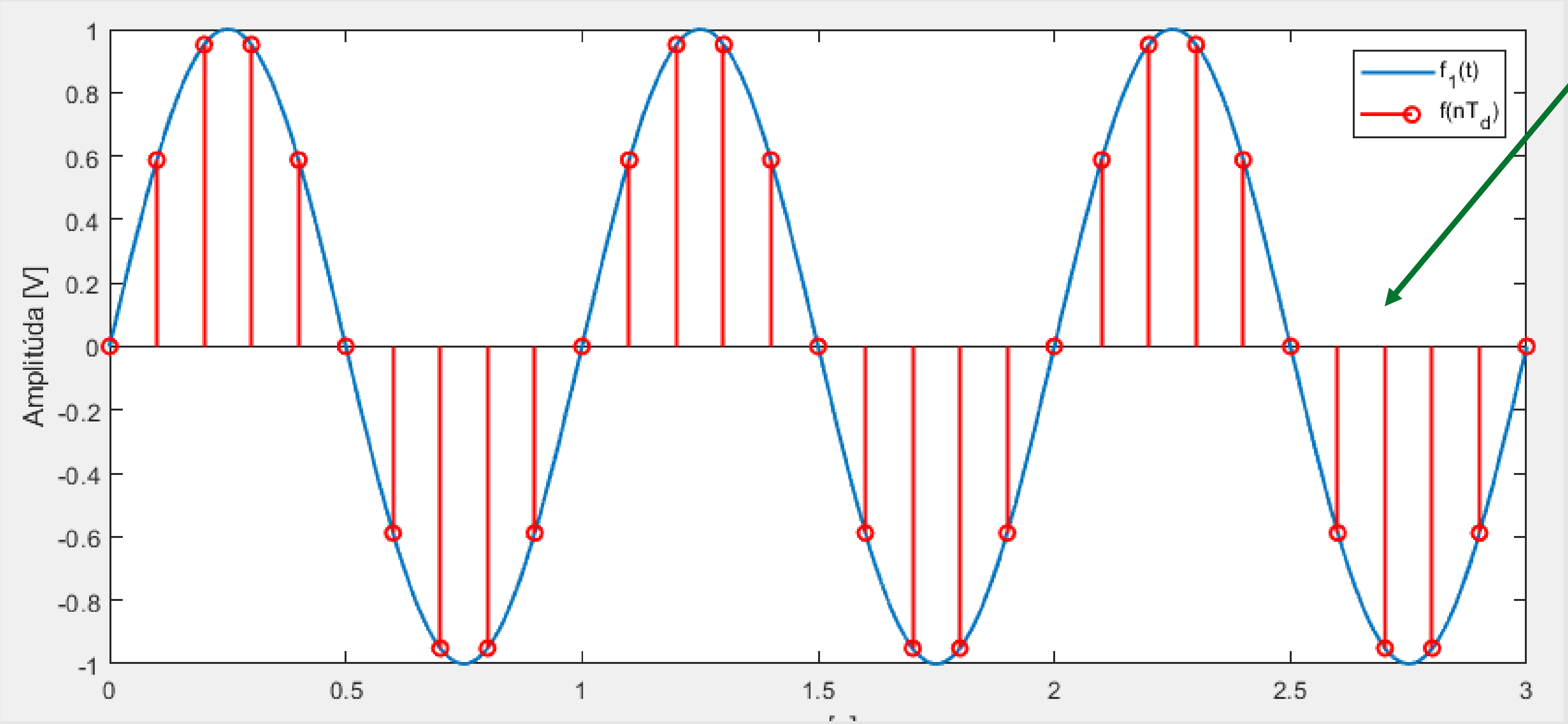
Skúsme tento signál vzorkovať po jeho troch zložkách ...

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = 10\ Hz;\ \ T_d \geq \frac{1}{2f_m} = 0.1\ s}$$



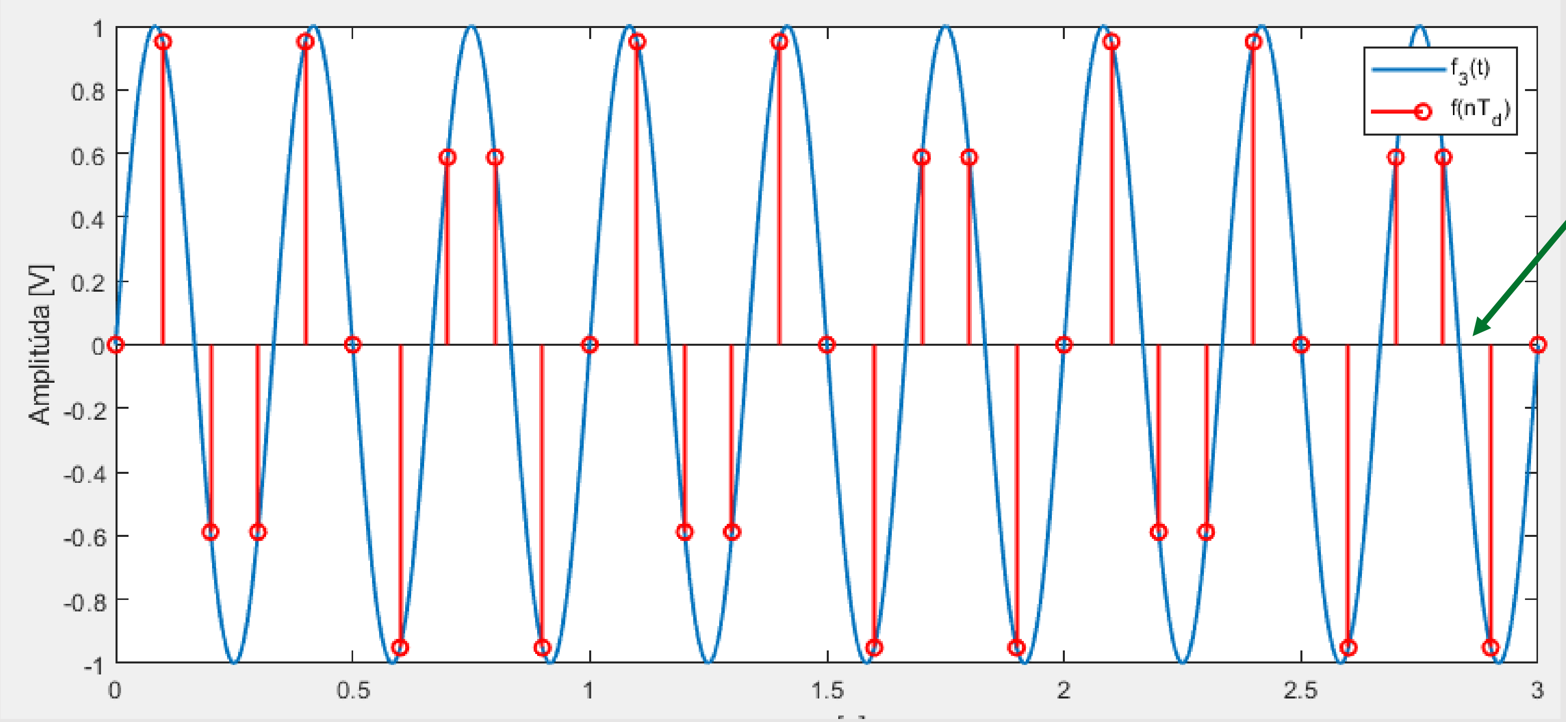
Zdá sa, že všetko je OK.

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = 10\ Hz;\ \ T_d \geq \frac{1}{2f_m} = 0.1\ s}$$



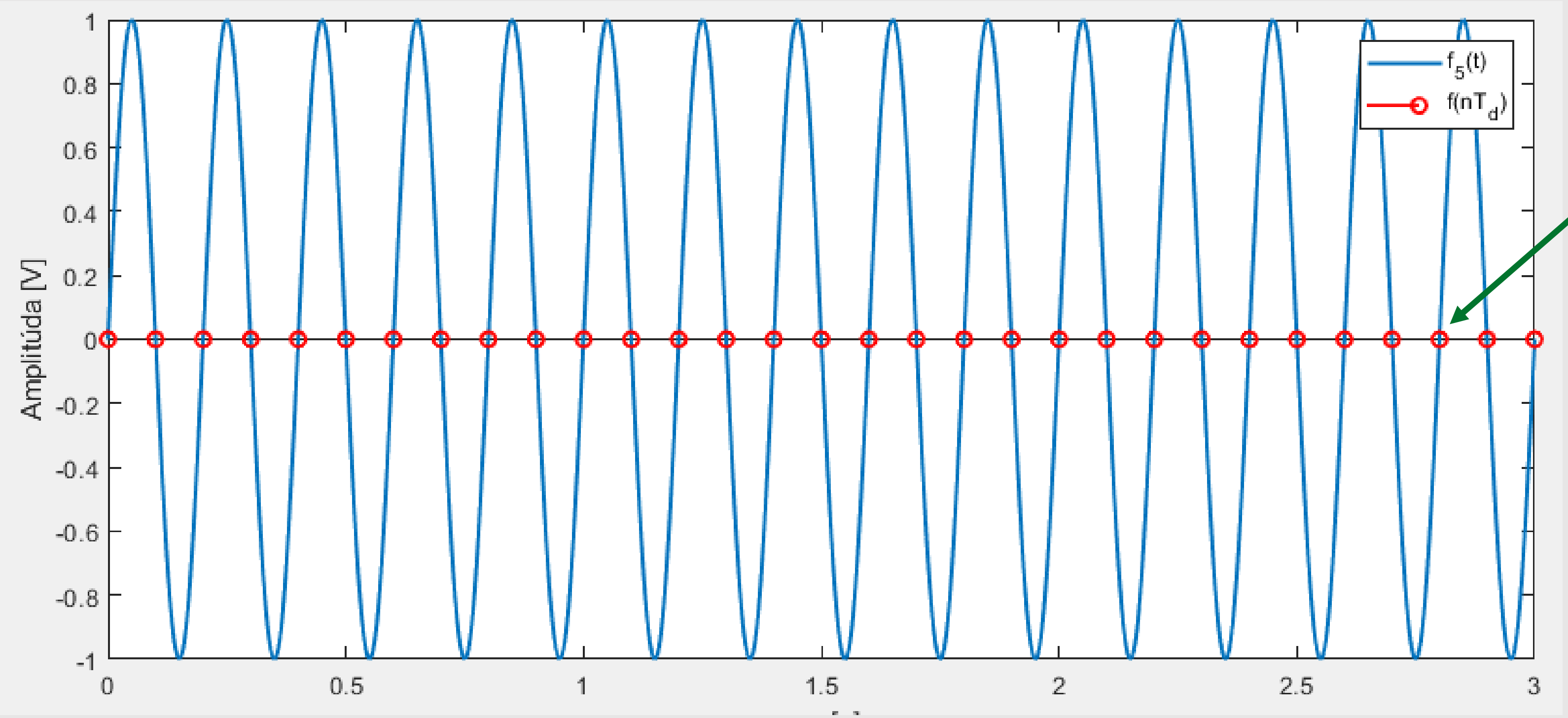
Zdá sa, že všetko je OK.

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = 10\ Hz;\ \ T_d \geq \frac{1}{2f_m} = 0.1\ s}$$



Zložky signálu s frekvenciou 5Hz sú nulové! Vzorkovanie zachytilo vždy okamih keď signál prechádzal nulovou hodnotou.

Vzorkovať by sme mali vždy s frekvenciou vyššou ako je dvojnásobok maximálnej frekvencie!

Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = \cancel{10}\ 15\ Hz;\ \ T_d \geq \frac{1}{f_m} = 0.0667s}$$

Vzorkovať by sme mali vždy s frekvenciou vyššou ako je dvojnásobok maximálnej frekvencie!

Upravme teda vzorkovaciu frekvenciu napríklad na 15Hz.

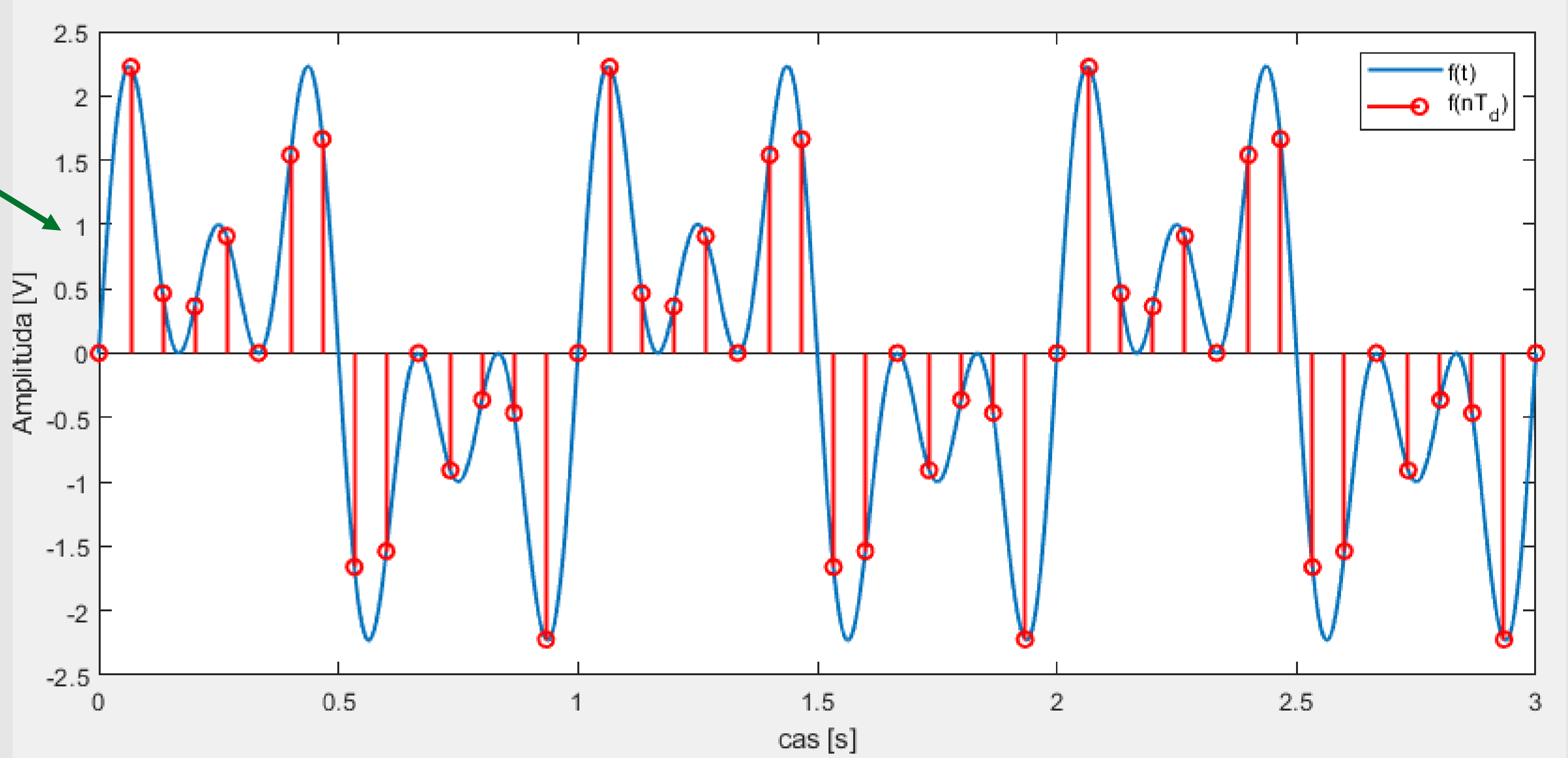
Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Príklad: Uvažujte signál, ktorý vznikol súčtom troch sínusových signálov s rovnakou amplitúdou 1V a s frekvenciami 1Hz, 3Hz a 5Hz. Zapíšte tento signál, určte maximálnu frekvenciu, minimálnu vzorkovaciu frekvenciu [Hz] a periódu [s] a vzorkujte tento signál.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz;\ \ f_d = \cancel{10}\ 15\ Hz;\ \ \ T_d \geq \frac{1}{f_m} = 0.0667s}$$

Tento signál by už malo byť možne obnoviť do pôvodnej formy.



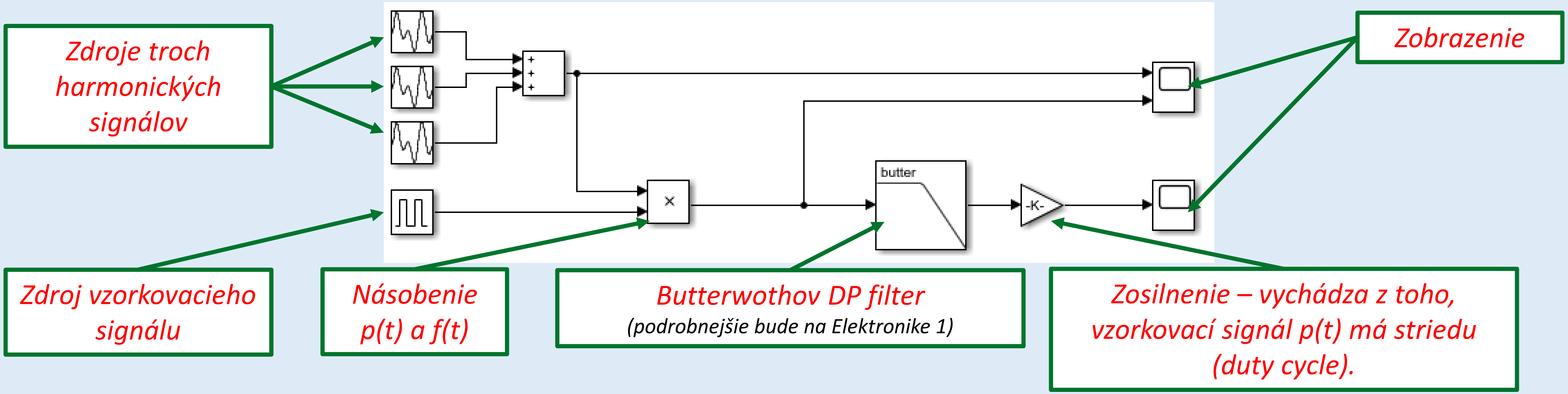
Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Uvažujeme stále rovnaký signál, ale vzorkovanie vykonáme nie ideálne ale pomocou PAM 1 a PAM 2.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Simulácie vykonáme v MATLAB-Simulink.

PAM 1:



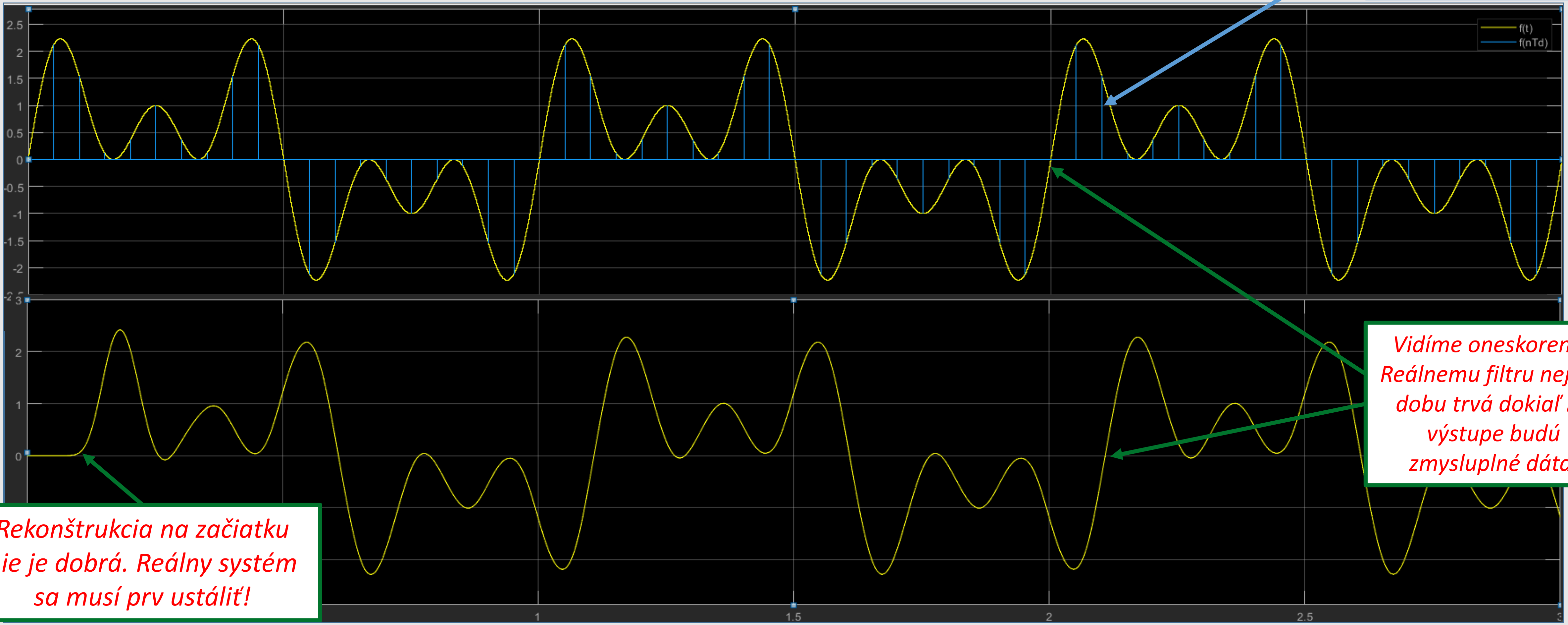
Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky – PAM 1

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Uvažujme tieto parametre:

$$f_m = 5Hz;\ \ f_d = 20\ Hz;\ \ \tau = 1\%\ z\ trvania T_d$$

Reálne vzorky netrvajú nekonečne krátko. (teraz to je 0.5 ms)



Vidíme oneskorenie. Reálnemu filtru nejakú dobu trvá dokiaľ na výstupe budú zmysluplné dáta.

Rekonštrukcia na začiatku nie je dobrá. Reálny systém sa musí prv ustáliť!

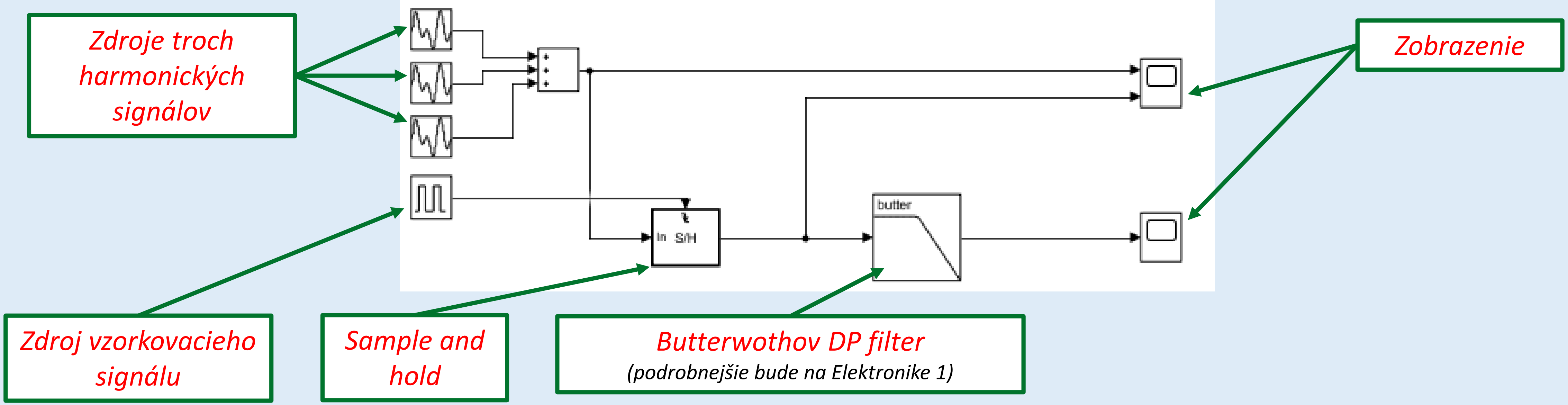
Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky

- Uvažujeme stále rovnaký signál, ale vzorkovanie vykonáme nie ideálne ale pomocou PAM 1 a PAM 2.

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Simulácie vykonáme v MATLAB-Simulink.

PAM 2:



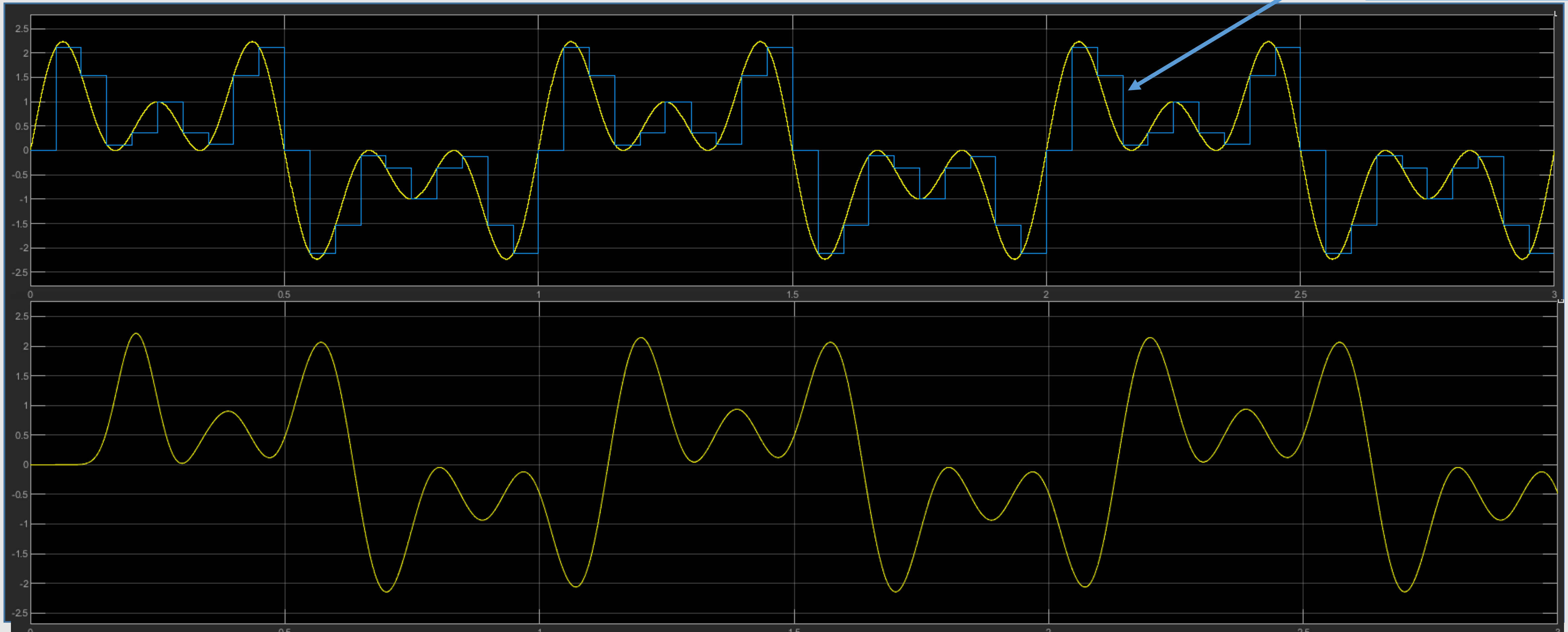
Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky – PAM 2

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Uvažujme tieto parametre:

$$\boldsymbol{f_m = 5Hz};\quad \boldsymbol{f_d = 20\ Hz};$$

Vzorky majú konštantnú hodnotu počas trvania T_d.



Vzorkovanie signálu – Praktické ukážky – PAM 2

$$f(t) = \sin(2\pi.1t) + \sin(2\pi.3t) + \sin(2\pi.5t)\ [V]$$

- Uvažujme tieto parametre:

$$f_m = 5Hz;\ \ f_d = 9\ Hz;$$